Администрация Великого Новгорода
Комитет по образованию
Институт образовательного маркетинга и кадровых ресурсов

Е. М. Кондрушенко
А. Д. Крет

Ох, уж эти окружности!

Учебно-методическое пособие

Великий Новгород
2021

УДК 372.851
ББК 74.262.215
К 64

Кондрушенко, Е. М.

К64 **Ох, уж эти окружности!** [Текст] **:** учебно-методическое пособие / Е. М. Кондрушенко, А. Д. Крет. – Великий Новгород: МАУ МООД «ИОМКР», 2021. – 30 с.

УДК 372.851
ББК 74.262.215

Содержание

Введение

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их!
Д. Пойа

Окружности как геометрические фигуры рассматриваются с начальной школы. Их изучение в начальной школе и в 5-6 классах осуществляется, в основном, на наглядно-интуитивном уровне. В курсе геометрии 7 класса, когда учащиеся приступают к изучению систематического курса геометрии, даётся формальное определение окружности как геометрической фигуры, состоящей из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки этой плоскости. Основные теоретические вопросы, связанные с окружностями, рассматриваются в 8 классе: взаимное расположение прямой и окружности; понятие касательной к окружности; понятия центрального и вписанного угла; теорема о вписанном угле; понятия вписанной и описанной окружности; существование и единственность окружности, описанной около треугольника; существование и единственность окружности, вписанной в треугольник; условия, при которых окружность может быть описана около четырёхугольника или вписана в четырёхугольник. В 9 классе к окружностям возвращаются при изучении главы «Длина окружности и площадь круга», в которой, помимо заявленных в названии формул, рассматриваются окружности, описанные около правильных многоугольников и окружности, вписанные в правильные многоугольники.

К сожалению, длительность изучения материала не гарантирует качества его усвоения, которое должно проявляться в умении решать самые разнообразные задачи на окружности. А ведь материал темы важен, является практически значимым и имеет дальнейшее развитие в курсе стереометрии. Важен, в частности, потому что при решении задач на окружности используется ряд приёмов, редко используемых при решении задач по другим темам геометрии, например, выполнение определённых дополнительных построений, без которых задача решена быть не может, переключение внимания с одной из двух пересекающихся окружностей на другую и другие. Является практически значимым, так как окружность – это фигура, с которой человек чаще всего сталкивается в повседневной жизни, других науках (зодиакальный круг, астрономический круг, параллели и меридианы, экватор, круглое ядро клетки и так далее), архитектуре и искусстве. Дальнейшее развитие темы происходит при изучении сферы и комбинаций сферы с многогранниками в стереометрии. Чтобы решить задачу на сферу, комбинацию многогранника и сферы, надо определённым образом построить сечение и решить соответствую планиметрическую задачу.

Чтобы ребята, заинтересованные в своих знаниях по математике, хорошо умели решать самые разнообразные задачи, в том числе и на окружности, необходимо:

- грамотно с методической точки зрения подбирать упражнения и задачи на формирование умения применять полученные знания;

- правильно организовывать работу над задачным материалом.

Поясним сказанное. Предлагаемый учащимся задачный материал должен быть определённым образом сгруппирован. Первоначально следует выделить, решить и запомнить основные (ключевые) задачи, которые являются составной частью решения многих более сложных задач. Постепенно усложняя решаемые задачи, продемонстрировать, как знание ключевых задач помогает получать решение более сложных задач. Среди решаемых задач должны быть и задачи пропедевтического плана, которые являются ключевыми для решения стереометрических задач. Набор ключевых задач по рассматриваемой теме должен быть полным. При решении более сложных задач полезно обращать внимание на ключевые задачи, которые использовались в решении, для их лучшего запоминания.

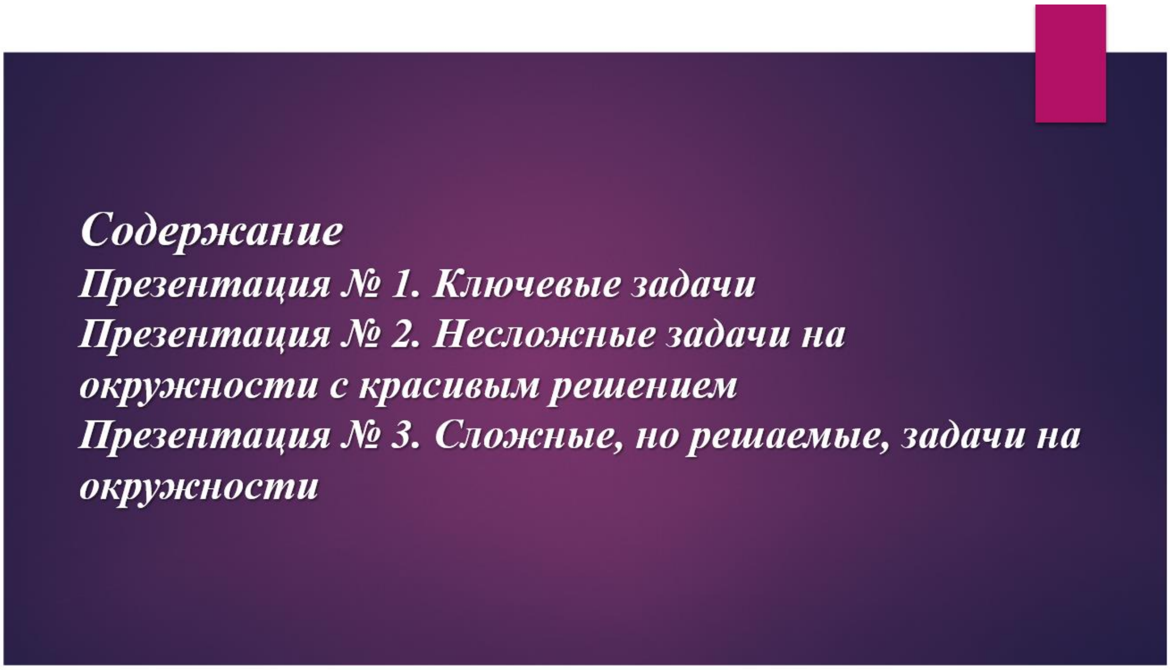
Под правильной организацией работы над задачами, в первую очередь, повышенного уровня сложности, понимается:

- анализ текста задачи;
- поиск решения задачи;
- прогнозирование;
- выработка плана решения задачи;
- грамотное, логически выстроенное оформление решения;
- анализ решения;
- исследование задачи;
- поиск других способов решения;
- выделение приёмов и методов, использованных в решении; выделение частных или более общих случаев.

Это означает, что на первый план в процессе решения задач следует выдвигать формирование приёмов умственной деятельности, необходимых для осуществления любой творческой и исследовательской деятельности.

Любая изучаемая на уроках теория важна не только сама по себе, но и как средство, аппарат для решения задач. Поэтому учитель должен доводить изучение теории с учащимися до овладения ими соответствующими методами решения задач. Овладение же общими подходами к решению нестандартных задач поможет учащимся правильно выбирать и реализовывать эти методы при решении конкретной задачи, в том числе и прикладного характера. Если у учителя не хватает учебного времени на доведение до овладения учащимися методами решения задач на основе изученной теории, то такую работу можно осуществлять в рамках факультативных занятий и элективных курсов.

В данном пособии, предназначенном для учителей математики, для учащихся средних школ, интересующихся математикой, для студентов педагогического направления (профиль математика) **приводится подборка** задачного материала, связанного с окружностями. Предлагаемые задачи с методической точки зрения разбиты на следующие группы: ключевые задачи; задачи для формирования умения видеть и использовать ключевые задачи в процессе решения; задачи повышенного уровня сложности. Рассматриваются задачи на окружности, на взаимное расположение прямой и окружности, на взаимное расположение окружностей, на вписанные и описанные окружности. Выделены методы и приёмы решения задач, раскрыты общие подходы к решению задач.



Предложенные материалы могут быть использованы на уроках геометрии, на этапе обобщающего повторения в 9 классе, на этапе подготовки к единому государственному экзамену профильного уровня в 11 классе, а также рассмотрены на факультативных занятиях или на соответствующем элективном курсе для учащихся 9 или 10–11 классов.

Что надо знать и уметь

Основная теория, которая лежит в основе решения задач на окружности, входит в программный материал курса геометрии. Это следующие понятия, свойства и факты, связанные непосредственно с понятием окружность: понятие центрального и вписанного угла; измерение центрального и вписанного угла с помощью угловых величин соответствующих дуг окружности; свойство пересекающихся хорд окружности; понятие касательной к окружности и ее свойства; свойство касательных к окружности, проведённых из одной точки. В процессе решения задач на окружность, вписанную в треугольник, и окружность, описанную около треугольника, надо хорошо знать, что: точка пересечения биссектрис треугольника – центр окружности, вписанной в треугольник; точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника – центр окружности, описанной около треугольника. Если дана окружность, вписанная в четырёхугольник, то, значит, суммы длин противолежащих сторон этого четырёхугольника равны. Наоборот, если суммы длин противолежащих сторон четырёхугольника равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Если дана окружность, описанная около четырёхугольника, то сумма величин противолежащих углов этого четырёхугольника равна 180^0. Если же сумма величин противолежащих углов четырёхугольника равна 180^0, то около этого четырёхугольника можно описать окружность. В более сложных задачах встречается понятие *вневписанной окружности треугольника*. Дадим определение вневписанной окружности: окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон, называется вневписанной окружностью треугольника. Любой треугольник имеет три вневписанных окружности (рис. 1).

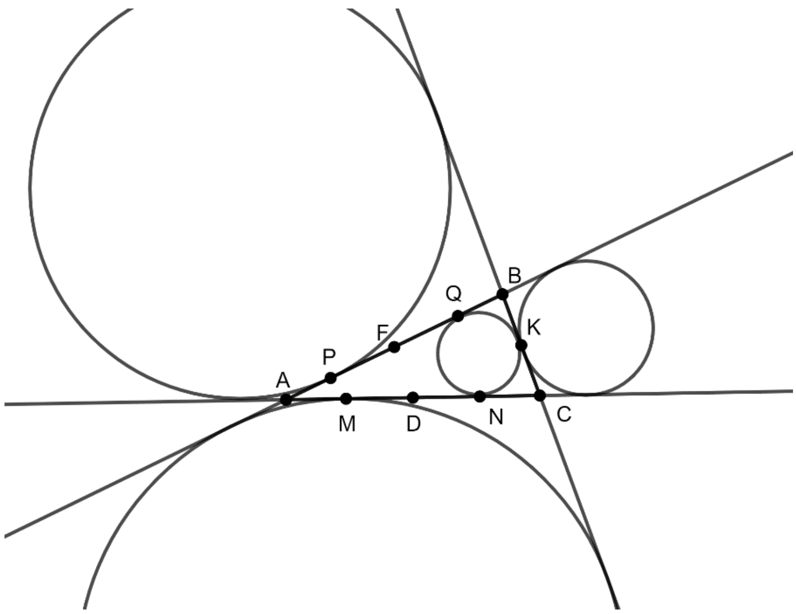
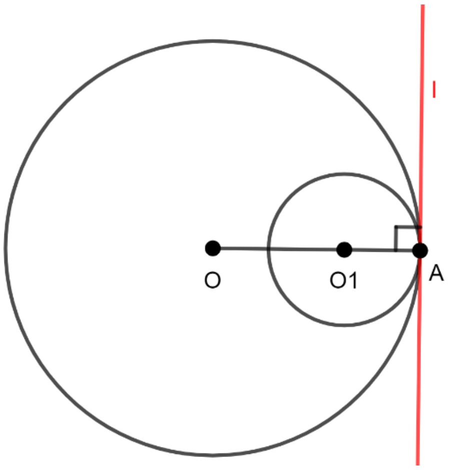


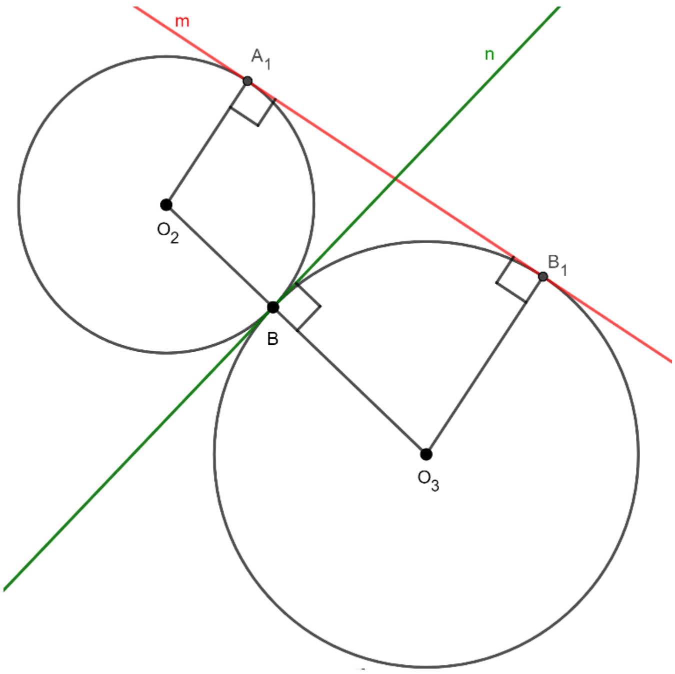
Рис. 1

Теперь о расположении двух окружностей. Две окружности могут не иметь общих точек, при этом одна из них может располагаться внутри другой или вне другой. Две окружности могут иметь только одну общую точку. В этом случае говорят, что окружности касаются. Касаться окружности могут внешним и внутренним образом. В первом случае одна окружность лежит вне другой (окружности касаются внешним образом), во втором – одна окружность лежит внутри второй (окружности касаются внутренним образом). Случаи касания окружностей представлены на рисунках 2 и 3. На этих рисунках проведены и общие касательные к окружностям.



l — общая касательная

Рис. 2



m, n — общие касательные

Рис. 3

При решении задач, в том числе на окружности, используются различные методы доказательств. Наряду с прямыми доказательствами, в которых рассуждения ведутся от того, что дано и что известно, доказано, к тому, что надо доказать или вычислить, используются доказательства косвенные: «от противного» и разделительные. В презентации представлено много задач, решение которых проводится с помощью прямых доказательств. Хочется чуть подробнее остановиться на тех видах доказательств, которые реже встречаются в школе. Способ доказательства «от противного» состоит в следующем: чтобы установить истинность теоремы, делают предположение, что она неверна. Тогда верно её отрицание. Исходя из этого, проводят рассуждения и приходят к тому, что одновременно верно какое-то утверждение и его отрицание, что невозможно. Поэтому говорят, что получено противоречие, и на этом основании делают вывод, что предположение неверно и, значит, теорема доказана. Разделительные доказательства используются в тех случаях, когда возможны не два, а несколько вариантов развития рассматриваемой ситуации. Перебирая эти варианты и приходя к противоречию во всех случаях, кроме того, который указан в формулировке теоремы, делаем вывод, что теорема верна. Метод «от противного» часто встречается при доказательстве теорем в школе, с разделительным методом доказательства мало кто из школьников знаком.

■ Приведём доказательство теоремы *«Если в четырёхугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность»*.

Дано: ABCD – четырёхугольник, AB+CD=BC+AD.

Доказать: в ABCD можно вписать окружность.

Доказательство:

Построим окружность, которая касается сторон AB, AD и BC четырёхугольника. Центр этой окружности – точка пересечения биссектрис углов ABC и BAD четырёхугольника. Тогда сторона CD четырёхугольника может:

а) пересекать окружность в двух точках;

б) не иметь с окружностью общих точек;

в) иметь с окружность одну общую точку (касаться окружности).

Рассмотрим случай а).

Предположим, что CD пересекает окружность в двух точках. Через точку C проведём касательную к окружности, которая пересечёт прямую AD в точке M, точка M не лежит на отрезке AD (рис. 4). По условию AB+CD = BC+AD (1). Но четырёхугольник ABCM описан около окружности, поэтому AB+CM=BC+AM (2). Из равенства (2) вычтем равенство (1). Получим CM−CD=AM−AD, CM−CD=DM или CM=CD+DM, чего быть не может, так как точки C, D и M не лежат на одной прямой. Значит, CD не может пересекать окружность в двух точках.

Рассмотрим случай б).

Предположим, что CD не имеет с окружностью общих точек. Через точку C проведём касательную к окружности, которая пересечёт прямую AD в точке N, точка N лежит на отрезке AD (рис. 5). По условию AB+CD=BC+AD (1). Но четырёхугольник ABCN описан около окружности, поэтому AB+CN=BC+AN (2). Из равенства (1) вычтем равенство (2). Получим CD−CN=AD−AN, CD−CN=DN или CD=CN+DN, чего быть не может, так как точки C, D и N не лежат на одной прямой. Значит, CD не может не иметь с окружностью общих точек.

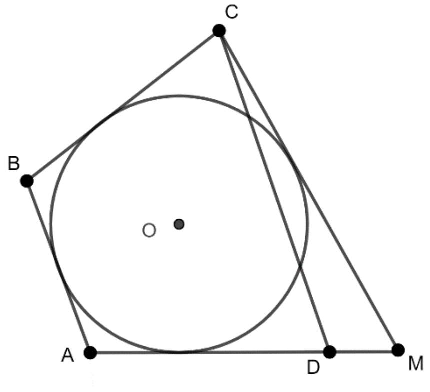


Рис. 4

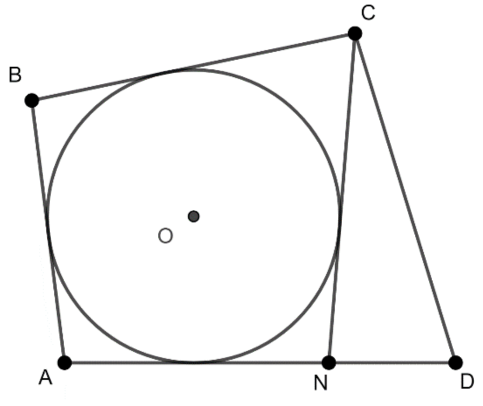


Рис. 5

Из рассмотрения случаев а) и б) следует, что сторона CD четырёхугольника ABCD имеет с окружностью одну общую точку, то есть касается окружности. Окружность, касающаяся сторон AB, AD, BC четырёхугольника ABCD, касается и стороны CD этого четырёхугольника. Следовательно, в ABCD можно вписать окружность.

Аналогично доказывается теорема: «Если в четырёхугольнике сумма величин противолежащих углов равна 180^0, то около этого четырёхугольника можно описать окружность». При доказательстве рассматривается четырёхугольник ABCD, в котором сумма величин противолежащих углов равна 180^0. Проводится окружность, проходящая через вершины A, B и C четырёхугольника. Вершина D может: а) лежать внутри окружности; б) лежать вне окружности; в) лежать на окружности. Указывая точку пересечения прямой AD в случаях а) и б) с окружностью и проводя работу с данным равенством и равенством, записанным для четырёхугольника, вписанного в окружность, приходим к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника. Делаем вывод о том, что точка D лежит на окружности, проходящей через вершины A, B и C четырёхугольника ABCD. Значит, эта окружность описана около четырёхугольника ABCD.

Обратим внимание ещё на один метод, который встречается при решении задач – метод полной индукции. При доказательстве теоремы о вписанном угле проводится умозаключение, основанное на полной индукции, то есть на рассмотрении всех возможных случаев, относящихся к данной ситуации и доказательстве определённого утверждения для каждого из этих случаев. Так, возможны три случая расположения центра окружности по отношению к сторонам вписанного угла: центр окружности лежит на стороне вписанного угла; центр окружности располагается внутри вписанного угла; центр окружности лежит вне вписанного угла. Доказывается, что в каждом из указанных случаев вписанный угол измеряется половиной угловой величины дуги, на которую он опирается. Поскольку рассмотрены все возможные случаи расположения центра окружности по отношению к сторонам угла, делается вывод о том, что теорема справедлива для любого вписанного угла. Итак, если мы доказываем какое-то утверждение в каждом из частных случаев, относящихся к рассматриваемой в задаче ситуации, то данное утверждение верно.

В геометрии практически каждая задача, за исключением одношаговых или двухшаговых задач на применение конкретных теорем, является задачей повышенного уровня сложности. Это связано с тем, что каждая такая задача в геометрии «индивидуальна», в геометрии практически нет задач, которые решаются путем следования конкретному алгоритму. А вот общие подходы, идеи, методы решения выделить можно. Для того чтобы не растеряться, увидев задачу повышенного уровня сложности, следует придерживаться определённого плана работы над задачей. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н., Стеценко В. Я. в книге «Как научиться решать задачи» выделяют следующие этапы работы над задачей:

– анализ задачи;
– схематическая запись задачи;
– поиск способа решения задачи;
– осуществление решения задачи;

– проверка решения задачи;
– исследование задачи;
– формулировка ответа задачи;
– анализ решения задачи.

Данный план отражает сложность и многоплановость процесса решения задач. Первые два этапа направлены на понимание и осознания задачи, ее условий и требований. Схематической записью при решении задач по геометрии является выполнение чертежа (если его выполнение необходимо для решения) и краткая запись условия и требований. Чертеж должен соответствовать задаче, то есть в планиметрии это изображение фигуры, подобной той, о которой идет речь в условии. Причем если в задаче говорится, например, о треугольнике, то следует изображать произвольный треугольник, а не равнобедренный и тем более не равносторонний. Указанные виды треугольников обладают дополнительными свойствами, которыми не обладает произвольный треугольник. Решающий задачу невольно может использовать свойства равнобедренного треугольника в случае выполнения не соответствующего задаче чертежа. Указанная ошибка при решении задач является весьма распространенной и часто приводит к тому, что даётся решение для частного случая рассматриваемой задачи, а не самой задачи. Желательно также при выполнении чертежа на глаз соблюдать те отношения, которыми связаны элементы данной фигуры (параллельные прямые изображать параллельными, перпендикулярные – перпендикулярными, соблюдать отношение длин отрезков и так далее). Соблюдение этого условия иногда помогает «увидеть» то свойство, которым обладает данная фигура и, отталкиваясь от которого после его доказательства, можно решить задачу – индуктивный метод при поиске решения задачи. Индуктивный метод поиска решения можно сочетать с переформулировкой задачи: выделением промежуточных задач, возникающих по ходу поиска решения, которые являются составными элементами решения задачи в целом.

В краткой записи должны быть перечислены все элементарные условия и требования задачи. Причем сначала обязательно указывается объект, о котором идет речь в задаче, а затем перечисляются его характеристики и свойства, указанные в задаче. При оформлении краткой записи используется символика, вводимая в учебнике.

Поиск решения задачи может осуществляться параллельно с анализом задачи и ее краткой записью. Поиск решения задачи – самый сложный этап решения. Существуют разные методы поиска решения задачи. Индуктивный метод и метод переформулировки задачи мы уже упомянули. Чуть позже охарактеризуем методы поиска решения задачи в форме восходящего анализа, нисходящего анализа, анализа в форме расчленения. Описание различных методов поиска решения задачи даётся в книге Груденова Я. И. «Совершенствование методики работы учителя математики».

Запись решения геометрической задачи проводится с выделением цепочек рассуждений. В каждой из цепочек либо сначала перечисляются все посылки, на основании которых делается вывод, либо сначала формулируется вывод, а затем после слов «так как» перечисляются все посылки, на основании которых этот вывод сделан.

После оформления решения следует убедиться, что оно правильное, все условия учтены, все шаги решения обоснованы. Иногда полезно провести исследование проведённого решения. Для этого надо ответить на вопросы: в каких случаях задача имеет решения и сколько, в каких случаях задача не имеет решения; в задачах какого вида можно использовать полученные результаты?

В задачах на вычисление после решения записывается ответ на поставленный в задаче вопрос.

Завершающим и необязательным, но очень полезным для формирования математической культуры и исследовательских умений у решающего, является этап анализа решения задачи. На этом этапе решающий выясняет насколько рационально приведенное решение, нет ли других способов решения, можно ли обобщить задачу, какие частные выводы можно сделать из полученного решения.

Общая схема восходящего анализа как метода поиска решения задачи имеет вид: для доказательства какого-либо утверждения A подбирается утверждение A_1, из которого следует A, затем отыскивается утверждение A_2, из которого следует утверждение A_1, и так далее до тех пор, пока не находим утверждения, являющегося истинным с учётом условия. Таким образом, путь решения найден. Проводя рассуждения в обратном порядке, доказываем требуемое утверждение. Если удаётся найти не одно, а несколько утверждений, из которых следует доказываемое или промежуточное утверждение, то можем получить различные способы решения задачи. В качестве примера рассмотрим задачу, которая часто используется как промежуточная при решении других задач на окружность.

■ Задача. Доказать, что если из некоторой точки вне окружности проведены к окружности касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной с концами в общей точке и точке касания с окружностью равен произведению отрезков секущей с концами в общей точке и в точках пересечения секущей с окружностью.

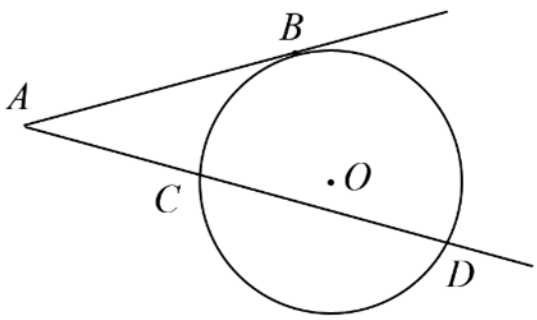


Рис. 6

Дано: Окр.(O; r), AB – касательная,
B – точка касания, AC– секущая.
Доказать: $AB^2 = AC \cdot AD$

При осуществлении поиска решения этой задачи в форме восходящего анализа примерная схема рассуждений будет следующей. Представим её в виде вопросов, на которые надо ответить.

Итак, дана окружность, AB – касательная к окружности, B – точка касания, AC – секущая. Надо доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$.

Что достаточно доказать, чтобы доказать, что $AB^2 = AC \cdot AD$?

$\left(\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}\right)$.

Что достаточно доказать, чтобы доказать, что $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$?

($\Delta ABC \backsim \Delta ABD$, (рис. 7)).

Что достаточно доказать, чтобы доказать, что $\Delta ABC \backsim \Delta ABD$?

(В ΔABC и ΔABD есть две пары равных углов).

Можем ли доказать, учитывая условие, что в ΔABC и ΔABD есть две пары равных углов?

(Да, угол BAC – общий, угол ABC равен углу ADB, так как оба измеряются половиной угловой величины дуги BC).

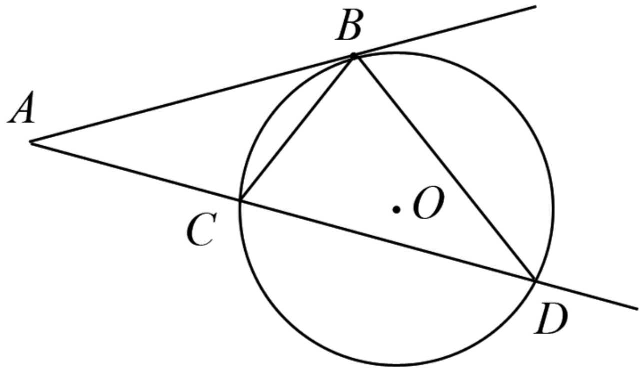


Рис. 7

Само доказательство ведётся в обратном порядке. Выполняется построение треугольников ABC и ABD, доказывается их подобие, записывается пропорция, используется основное свойство пропорции.

Анализ, проводимый при поиске решения задачи, позволяет лишь найти путь решения. Запись решения ведётся от того, что дано, к тому, что требуется доказать или вычислить.

При проведении поиска решения задачи в форме нисходящего анализа, рассуждения также проводятся от того, что требуется доказать или найти. Общая схема нисходящего анализа имеет следующий вид.

Пусть требуется доказать некоторое утверждение A. Предполагаем, что оно верно и пытаемся получить из него верное следствие. Если получено неверное следствие, то утверждение A неверно. Если получено верное следствие и все рассуждения обратимы, то A верно. В этом случае решение начинается с рассмотрения полученного верного следствия и по цепочке идёт в обратном порядке. Если среди рассуждений при получении верного следствия есть необратимые или верное следствие получить не удаётся, то следует применять другие методы поиска решения задачи.

Покажем использование нисходящего анализа при поиске решения следующей задачи.

■ Задача. Доказать, что площадь треугольника равна произведению длин его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной около него окружности.

Поиск решения этой задачи в форме нисходящего анализа будет выглядеть следующим образом. Пусть дан треугольник со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R. Надо доказать, что $S_{\text{тр.}} = \frac{abc}{4R}$. Попытаемся получить из доказываемого равенства верное следствие. Так как $S_{тр.} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, где γ– угол, лежащий против стороны c, то получим $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{abc}{4R}$; $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$; $c = 2R\sin\gamma$.

Последнее равенство верно (следствие из теоремы синусов). Все рассуждения обратимы. Идея доказательства найдена. Начнем проводить доказательство с последнего равенства, которое доказано ранее. Будем проводить над ним равносильные преобразования, поднимаясь по указанной цепочке снизу вверх, пока не получим равенство, которое требуется доказать.

Анализ в форме расчленения как метод поиска решения задачи имеет следующую схему:

- условие задачи разбивается на отдельные части;
- выделяются отдельные условия, остальные временно не учитываются;
- из отобранных условий составляется более лёгкая вспомогательная задача;
- после решения вспомогательной задачи переходят к данной задаче, используя либо идею решения, либо полученный результат.

Работа над различными пунктами плана, приведённого выше, в реальном процессе решения задачи повышенного уровня сложности протекает практически одновременно. Проведя анализ текста задачи, делаем чертёж (если в этом есть необходимость), корректируя его выполнение проведёнными в ходе анализа рассуждениями, параллельно ведём схематическую запись условия и начинаем поиск решения задачи. Методы поиска решения задачи используются не по одному, а в комплексе. Так, мы стараемся сделать правильный наглядный чертёж, надеясь рассмотреть на этом чертеже подсказку; анализируя текст задачи, переформулируем её, разбиваем на подготовительные задачи; начинаем искать утверждения, из которых следует искомое и так далее.

Поясним сказанное и раскроем применение анализа в форме расчленения при поиске решения на примере следующей задачи.

■ Задача. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке D. Прямая касается одной из них в точке A, а другую пересекает в точках B и C. Докажите, что точка A равноудалена от прямых DB и CD.

Примерная работа над задачей.

Анализируем условие. Две окружности касаются внешним образом, то есть ни одна окружность не располагается внутри другой. Проводится прямая, которая для одной окружности является касательной, а для другой – секущей. Делаем чертёж и краткую запись условия.

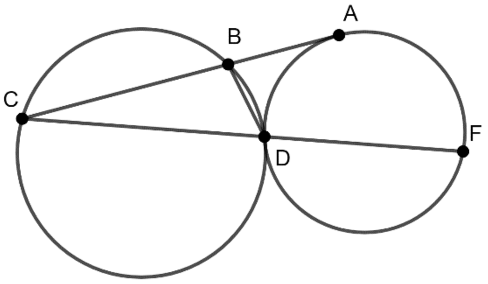


Рис. 8

Дано: Окр. $(O_1; r_1)$, Окр. $(O_2; r_2)$, D – точка касания окружностей, AB – касательная к Окр. $(O_2; r_2)$, A – точка касания, AB пересекает Окр. $(O_1; r_1)$ в точках B и C.

Доказать: A равноудалена от прямых DB и CD.

Анализируем требование. На первый взгляд не очень понятно, что следует делать. Опустить перпендикуляры из точки *A* на прямые *DB* и *CD*, и затем доказать равенство полученных прямоугольных треугольников? Но для доказательства равенства треугольников нет никаких данных («оглядываемся» на условие, прогнозируем). Переосмыслим требование: надо доказать, что точка *A* равноудалена от двух пересекающихся прямых *DB* и *CD*. Но геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон угла является биссектриса угла. Значит, для доказательства того, что точка *A* равноудалена от двух пересекающихся прямых *DB* и *CD*, нам достаточно доказать, что точка *A* лежит на биссектрисе угла *BDF*, где *F* – вторая точка пересечения прямой *CD* с Окр. $(O_2;r_2)$. Иначе, нам надо доказать, что угол *BDA* равен углу *ADF* (восходящий анализ).

Рассмотрим каждую из окружностей отдельно. «Границей» между ними является общая касательная, проходящая через точку *D*. Проведём общую касательную *DQ* (рис. 9). Задача: найти равные углы в каждой из окружностей(анализ в форме расчленения).

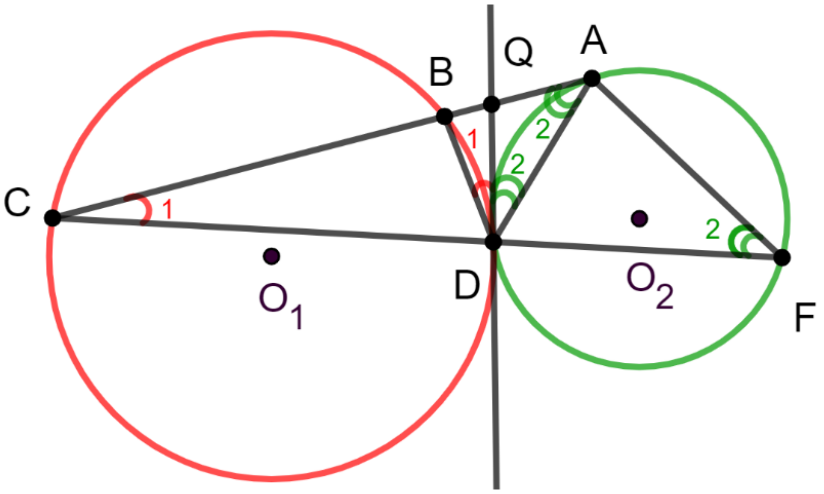


Рис. 9

Рассмотрим первую окружность. В Окр. $(O_1; r_1)$ угол *BCD* равен углу *BDQ*. Угол *BCD* – вписанный, опирается на дугу *DB*, измеряется половиной угловой величины этой дуги. Угол *BDQ* – угол между касательной и хордой, проведённой в точку касания, измеряется также половиной угловой величины дуги *DB*. Рассмотрим вторую окружность. В Окр.$(O_2;r_2)$ равны углы *AFD*, *QAD* и *QDA*. Угол *AFD* – вписанный, опирается на дугу *AD*, измеряется половиной угловой величины этой дуги. Углы *QAD* и *QDA* – углы между касательной и хордой, проходящей через точки касания, измеряются также половиной угловой величины дуги *AD*. Вернёмся к исходной задаче. Как могут помочь установленные факты в её решении? Один из интересующих нас углов – угол *BDA* равен сумме углов *BDQ* и *QDA*. Значит, достаточно доказать, что второй угол – угол *ADF*, равен сумме углов, равных соответственно углам *BDQ* и *QDA*, то есть сумме углов *BCD* и *QAD* или сумме углов *BCD* и *AFD*. Но угол *ADF* – внешний угол треугольника *ACD*, и равен сумме двух внутренних углов этого треугольника, с ним несмежных, то есть сумме углов *BCD* и *QAD*. Решение найдено. Далее оформляем доказательство.

Доказательство:

В Окр. $(O_1;\ r_1)$ $\angle BDQ = \frac{1}{2}\smile BD$ как угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания, $\angle BCD = \frac{1}{2}\smile BD$ как вписанный, значит $\angle BDQ = \angle BCD$.

В Окр. $(O_2;r_2)$ $\angle AFD=\frac{1}{2}\smile AD$ как вписанный, $\angle QAD=\angle DQA=\frac{1}{2}\smile AD$ как углы между касательной и хордой, проходящей через точку касания, значит, $\angle AFD=\angle QAD=\angle QDA$.

$\angle BDA=\angle BDQ+\angle QDA$, $\angle ADF=\angle BCD+\angle QAD$ как внешний угол

ΔACD, но $\angle BDQ=\angle BCD$ и $\angle QDA=\angle QAD$. Следовательно,

$\angle BDA=\angle ADF$, AD – биссектриса $\angle BFD$ и точка A равноудалена от прямых DB и CD.

Доказательство проведено. Убеждаемся, что все шаги доказательства обоснованы, лишних шагов в доказательстве нет. Доказательство является рациональным. Если бы провели перпендикуляры из точки A на прямые DB и CD, то для доказательства равенства прямоугольных треугольников с общей гипотенузой AD, всё равно пришлось бы доказывать равенство углов $\angle BDA$ и $\angle ADF$.

Отметим, что анализ в форме расчленения как метод поиска решения задачи практически всегда используется в задачах, где речь идёт о взаимном расположении двух и более окружностей.

Итак, в первой части пособия мы напомнили некоторые теоретические положения, знание которых необходимо при решении задач на окружности и показали, как можно осуществлять работу над задачей повышенного уровня сложности. Во второй части пособия рассмотрим ключевые задачи, знание которых позволит сводить к ним решение более сложных задач, что будет продемонстрировано на конкретных примерах. Задачи повышенного уровня сложности на окружности с решениями будут представлены в третьей части пособия в виде презентации.

Ключи к решению

Процесс решения задачи повышенного уровня сложности в геометрии состоит из последовательности рассуждений, каждое из которых является либо непосредственным использование изученной теоремы при наличии необходимых посылок, либо шагов, подготавливающих к использованию изученной теоремы, свойства, формулы. При этом есть рассуждения, которые очень часто используются при решении задач и доказательстве теорем по определённой теме. Их выделяют, формулируют в виде задач и называют ключевыми (по терминологии Хазанкина Р. Г.). Понятие «ключевая задача» условное. К ключевым задачам можно отнести задачи, часто используемые в решении более сложных задач по данной теме; теоремы, доказательство которых вынесено за рамки основного теоретического материала. Безусловно, и любая изученная теорема является «ключом» к решению определённого вида задач, даёт в руки аппарат для решения задач. Если ключевая задача не является теоремой, то в решении более сложной задачи при её использовании требуется привести выкладки, которые использовались при рассмотрении этой ключевой задачи, а не просто сослаться на неё. Таким образом, при решении сложной задачи используются либо формулировка, либо ход рассуждений ключевой задачи, хорошо знакомый учащимся. Суть методической работы по обучению учащихся решению задач в том, что учитель выделяет подборку таких задач и фиксирует на ней внимание школьников, подчёркивая, что практически любая более сложная задача по рассматриваемой теме может быть сведена к решению нескольких ключевых задач. Затем решаются задачи повышенного уровня сложности по изучаемой теме, сводимые к использованию нескольких ключевых задач. Предлагаются задачи для индивидуального решения. Обучающиеся должны найти решение и выделить ключевые задачи, которые использовались. Если в процессе решения задач появилось какое-либо рассуждение, часто используемое, но не включённое в список ключевых задач, то список ключевых задач пополняется соответствующей задачей. При таком подходе школьники не только запоминают ключевые задачи, но и обучаются решению более сложных задач. Ключевых задач по теме, как правило, немного.

Приведём список задач, которые часто используются в решении задач, в которых речь идёт об окружности или о взаимном расположении прямой и окружности.

1. Доказать, что хорды окружности равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра окружности.

2. Доказать, что любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

3. Доказать, что если две параллельные прямые пересекают окружность каждая в двух точках, то дуги окружности, заключенные между этими прямыми, равны.

4. Доказать, что хорда окружности равна произведению диаметра на синус вписанного угла, опирающегося на дугу, стягиваемую этой хордой.

5. Доказать, что отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, от общей точки до точек касания, равны.

6. Доказать, что угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной между его сторонами.

7. Доказать, что если из некоторой точки вне окружности проведены к окружности касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной с концами в общей точке и точке касания с окружностью равен произведению отрезков секущей с концами в общей точке и в точках пересечения секущей с окружностью.

8. Доказать, что угол, образованный двумя секущими с общей точкой, лежащей вне окружности (вершина угла), равен модулю полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

9. Доказать, что угол между пересекающимися хордами окружности равен полусумме угловых величин дуг, заключенных между сторонами данного угла и угла с ним вертикального.

При решении указанных задач используются некоторые общие приёмы и дополнительные построения. Так, в задачах *1, 2, 5* для доказательства выделяются пары равных прямоугольных треугольников. Как получаются пары равных прямоугольных треугольников в задачах *1* и *5*, очевидно. В задаче *2* сначала строится произвольная прямая, проходящая через центр окружности. Надо доказать, что эта прямая является осью симметрии окружности. Для доказательства проводится прямая, перпендикулярная этой прямой и пересекающая окружность в двух точках, что и позволяет выделить равные прямоугольные треугольники. В доказательстве задачи *3* используется задача *2*, для чего сначала проводится прямая, перпендикулярная двум данным параллельным прямым и проходящая через центр окружности. Эта прямая является осью симметрии окружности. Кроме приёма выделения пары равных прямоугольных треугольников в задачах на окружности часто используется приём выделения прямоугольного треугольника, в котором прямой угол опирается на диаметр. Для этого сначала часто приходится выполнять дополнительные построения. Например, в задаче под номером *4* проведение диаметра окружности через один из концов хорды позволяет получить прямоугольный треугольник и сделать необходимый вывод. В самом тексте задачи содержится подсказка на выполнение такого построения. В тексте задачи под номером *6* о диаметре ничего не говорится. Однако тот факт, что половиной угловой величины дуги, заключённой между сторонами рассматриваемого угла, измеряются вписанные в окружность углы, опирающиеся на эту дугу, наводит на мысль о построении вписанного угла, опирающегося на дугу, заключённую между сторонами рассматриваемого угла. Таких углов бесконечное множество. Какой из этих углов выделить? Но ведь в условии задачи речь идёт о касательной к окружности, а касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания. Значит, одной стороной вписанного угла надо выбрать диаметр, проведённый через точку касания. Итак, через точку касания прямой с окружностью (общую точку прямой и хорды) и центр окружности проводим диаметр и фиксируем треугольник с вершинами в концах диаметра и втором конце хорды. Это построение – проведение диаметра через определённую точку на окружности – часто помогает решить задачу, так как позволяет выделить прямоугольный треугольник, вписанный в окружность. В задачах под номерами *8* и *9* использование такого дополнительного построения, как проведение через точку пересечения одной из секущих с окружностью прямой, параллельной другой секущей, позволяет заменить интересующий нас угол равным ему углом, но вписанным в окружность. Замена с помощью проведения прямой, параллельной одной из сторон угла с вершиной внутри или вне окружности равным ему вписанным углом также часто используемое в задачах на окружности построение. Чертежи к задачам *6, 8, 9,* которые получаются после выполнения указанных выше дополнительных построений, представлены на рисунках *10, 11, 12*. Читателю предоставляется право самому сопоставить данные задачи с соответствующими элементами чертежей. Решение задачи *7* уже рассматривалось выше.

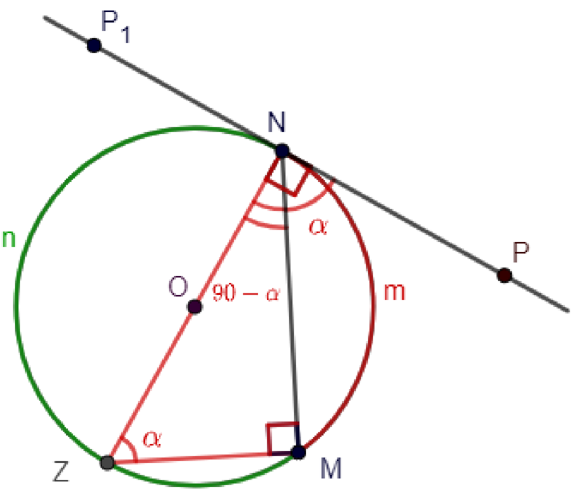


Рис. 10

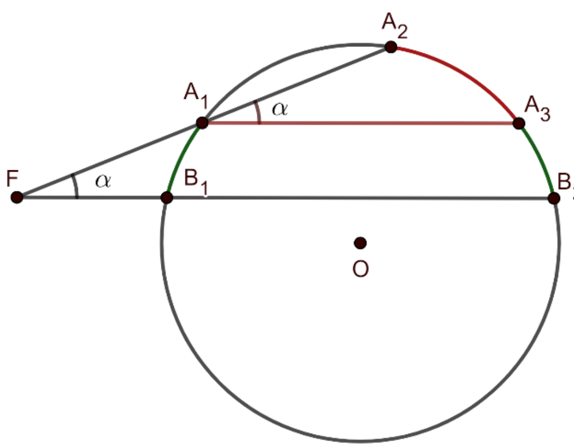


Рис. 11

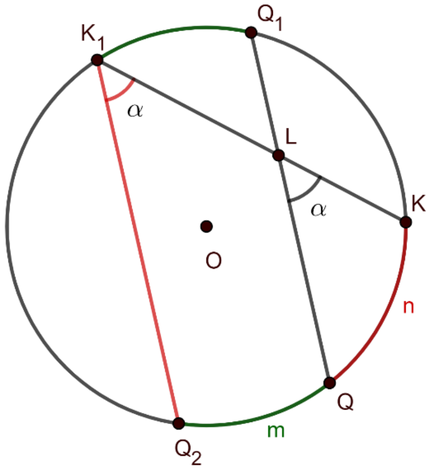


Рис. 12

Рассмотрим, как используются ключевые задачи при решении других задач. Один пример уже был рассмотрен: использование задачи *2* при решении задачи *3* с предварительным выполнением дополнительного построения. Задача 10 является примером задачи на непосредственное использование ключевой задачи *7*.

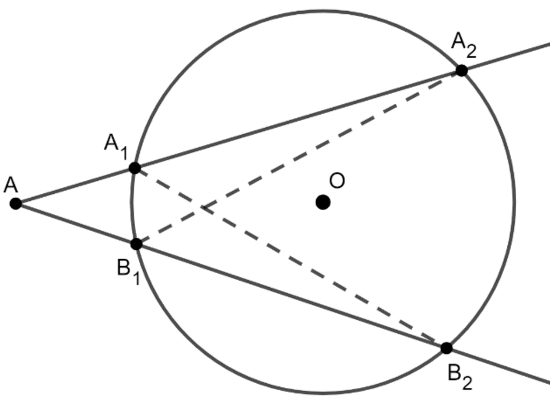
■ 10. Из точки вне окружности проводятся к окружности прямые, каждая из которых пересекает окружность в двух точках (секущие). Доказать, что произведение отрезков от общей точки до точек пересечения с окружностью каждой из секущих есть величина постоянная.

Для того чтобы «увидеть» как в данной ситуации поможет задача *7*, достаточно провести из общей точки секущих касательную к окружности. Секущие к окружности есть, а касательной не хватает! Оказалось, что произведение интересующих нас отрезков секущей равно квадрату отрезка касательной от общей для всех прямых точки до точки касания. Возьмём на заметку и это дополнительное построение. При решении задач, которые будут предложены в статье позже, будем часто его использовать.

Задача 10 первоначально может быть представлена в ином виде.

■ 10.1. Дана окружность и точка A вне окружности. Из точки A проводятся две секущие: одна из них пересекает окружность в точках A_1 и A_2, другая – в точках B_1 и B_2. Доказать, что $AA_1 \times AA_2 = AB_1 \times AB_2$.

Можно через точку A провести касательную к окружности и использовать рассмотренную ключевую задачу под номером *7*. Можно рассмотреть треугольники AA_1B_2 и AA_2B_1. Треугольники будут подобны по двум углам: один угол общий, другая пара равных углов – это вписанные углы, опирающиеся на одну дугу (рис. 13). Задача 10 будет обобщением задачи 10.1.



$$AA_1 \times AA_2 = AB_1 \times AB_2$$

Рис. 13

Заметим, что одна и та же задача в геометрии может иметь несколько способов решения. В данном пособии будет рассматриваться, как правило, наиболее рациональный способ решения конкретной задачи.

Рассмотрим задачи на вписанные в окружность и описанные около окружности треугольники, которые можно считать ключевыми.

11. Доказать, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

12. Доказать, что площадь треугольника равна произведению длин его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной около него окружности.

13. В треугольнике ABC BC=a, AC=b, AB=c, p – полупериметр треугольника ABC. В треугольник вписана окружность. M – точка касания окружности со стороной AB, N – точка касания окружности со стороной BC, P – точка касания окружности со стороной AC. Доказать, что AM=p – a, BN=p – b, CP=p – c.

14. ABCD – четырёхугольник, O – точка пересечения его диагоналей. Доказать, что около ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда AO×OC=BO×OD.

15. В треугольниках ABC и ADC точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, угол ABC равен углу ADC. Доказать, что точки A, B, D и C лежат на одной окружности.

Задача *11* имеет красивое простое доказательство, основанное на свойстве площадей: если многоугольник составлен из нескольких многоугольников так, что эти многоугольники не имеют общих внутренних точек, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников. Центр вписанной в треугольник окружности соединяем с его вершинами, тем самым разбиваем треугольник на три треугольника. Высотой каждого из этих треугольников будет радиус вписанной окружности, проведенный в точку касания со стороной. Суммируя площади полученных треугольников, получаем то, что требуется доказать.

Задача *12* рассмотрена выше.

Рассмотрим решение задачи *13*.

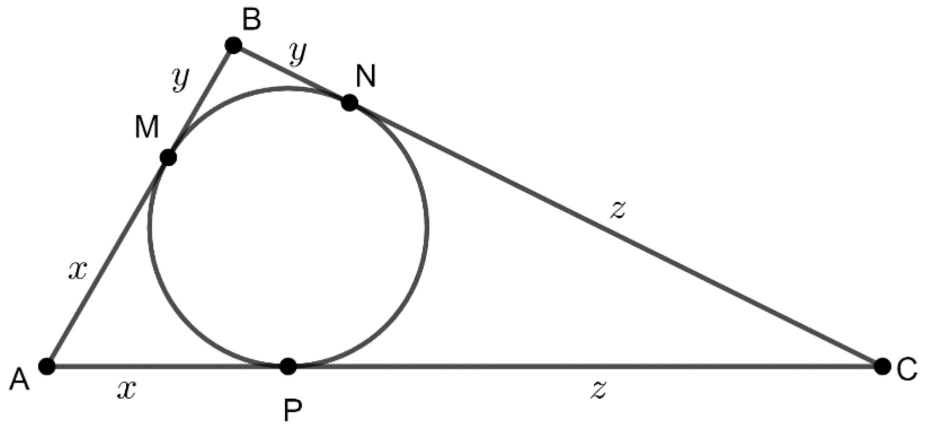


Рис. 14

Обозначим AP=AM через x, BM=BN через y, CN=CH через z (рис. 14). Тогда $2x+2y+2z=2p$, $x+y+z=p$, $x= p – (y+z)= p – a$.

Аналогично получим, что $y=p – b$, $z =p – c$.

На примере этой задачи покажем, как используются ключевые задачи при решении более сложных задач.

■ Задача 13.1

M и N – точки касания окружности со сторонами AB и BC треугольника ABC. X – произвольная точка дуги MN. EF – отрезок касательной, проведённой к окружности в точке X. Докажите, что тогда периметр треугольника BEF не зависит от выбора точки X и равен 2(p – b), где p – полупериметр ABC, b – длина стороны AC.

Доказательство:

$$P_{BEF} = BE + BF + FE = BE + BF + XE + XF = BE + BF + ME + FN =$$
$$= BM + BN = 2(p - b)$$ (рис. 15).

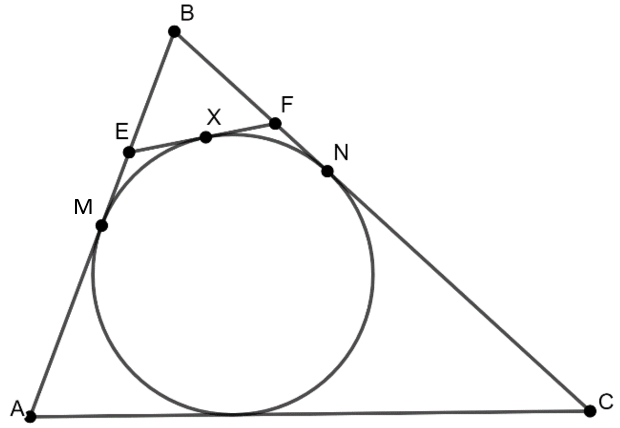


Рис. 15

■ Задача 13.2

В треугольнике проведены три прямые, параллельные его сторонам и касающиеся вписанной окружности. Они отсекают от данного треугольника три треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих образовавшихся треугольников R_1 , R_2 , R_3. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

Решение.

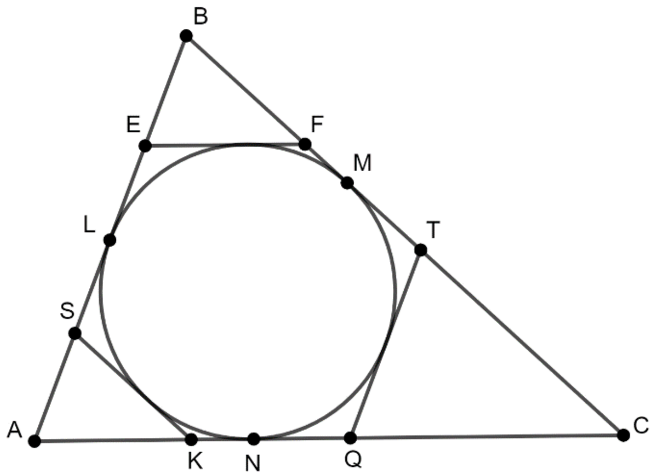


Рис. 16

Пусть AB=c, BC=a, AC=d. Тогда $P_{ASK} = 2(p - a)$, $P_{BEF} = 2(p - b)$, $P_{QTC} = 2(p - c)$.

Так как $EF \parallel AC$, SK ∥ BC, TQ ∥ AB, то треугольник Δ BEF ∽ Δ ABC , ΔASK ∽ Δ ABC, ΔTQC ∽ Δ ABC. Периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие линейные элементы.

Тогда $\frac{R_1}{R} = \frac{2(p-a)}{2p}$, $\frac{R_2}{R} = \frac{2(p-b)}{2p}$, $\frac{R_3}{R} = \frac{2(p-c)}{2p}$, где R – радиус окружности, описанной около Δ ABC . Сложим левые и правые части полученных равенств и преобразуем правую часть:

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R} = \frac{p - a + p - b + p - c}{p} = \frac{3p - (a + b + c)}{p} = \frac{3p - 2p}{p} = 1.$$

Значит, $R_1 + R_2 + R_3 = R$.

Задачи 13, 13.1 и 13.2 представляют цепочку взаимосвязанных задач: решение первой подготавливает к решению второй, решение второй подготавливает к решению третьей.

В задаче 14 сформулировано ещё одно необходимое и достаточное условие существования окружности, описанной около четырёхугольника. Доказательство обеих теорем сводится к доказательству подобия треугольников, например, AOB и COD, в одном случае по наличию двух пар равных углов, во втором – по пропорциональности сторон, заключающих равные углы.

К задаче 15 приходится часто обращаться при решении более сложных задач на окружности. Приведём доказательство этого утверждения.

Итак, есть два треугольника с общей стороной AC. Третьи вершины B и D этих треугольников лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC и величины углов ABC и ADC равны. Надо доказать, что точки A, B, D и C лежат на одной окружности. Выберем косвенный путь доказательства, а именно доказательство разделительное.

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Точка D может: а) лежать внутри этой окружности; б) лежать вне этой окружности; в) лежать на этой окружности. Покажем, что случаи а) и б) невозможны.

А) Предположим, что точка D лежит внутри окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда луч AD пересечёт окружность в некоторой точке F (рис. 17).

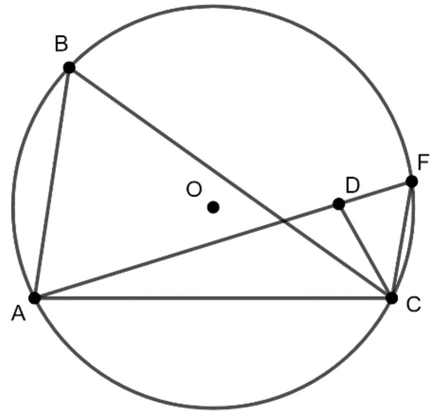


Рис. 17

По условию угол ADC равен углу ABC, но угол ABC вписанный и опирается на дугу AC окружности. На эту же дугу опирается вписанный угол AFC. Значит, углы ADC, ABC и AFC равны. Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника: угол ADC внешний угол треугольника FCD и равен сумме углов AFC и FCD. Значит, точка D не может лежать внутри окружности, описанной около треугольника ABC.

Б) Предположим, что точка D лежит вне окружности. Зафиксируем точку N пересечения отрезка AD с окружностью. Аналогично проведённому доказательству убеждаемся, что точка D не может лежать вне окружности.

В) Точка D, по доказанному выше, не может лежать внутри и вне окружности, описанной около треугольника ABC, значит, она лежит на окружности.

Следовательно, точки A, B, D и C лежат на одной окружности.

Рассмотрим ключевые задачи на взаимное расположение двух окружностей.

16. Докажите, что центры двух касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой.

17. Докажите, что отрезки общих касательных, проведённых к внешне касающимся окружностям, с концами в точках касания равны.

18. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти длину отрезка общей касательной с концами в точках касания.

Для доказательства того факта, что центры двух касающихся окружностей и их точка касания лежат на одной прямой, можно использовать метод «от противного». Через центры окружностей проведём прямую. Предположим, что точка касания не лежит на этой прямой. Так как прямая, проходящая через центры окружностей, является осью симметрии рассматриваемой конфигурации, то общая точка – точка касания, не лежащая на оси симметрии, перейдёт при этой симметрии в общую точку этих окружностей, лежащую по другую сторону от оси. Таким образом, окружности будут иметь две общие точки, что противоречит условию.

К задаче *17* не требуется никаких пояснений.

Для решения задачи *18* выполняем дополнительное построение. Через одну из точек касания проводим прямую, параллельную прямой, проходящей через центры окружностей (рис. 18) или через один из центров проводим прямую, параллельную касательной. Такое построение позволит получить прямоугольный треугольник, в котором через радиусы выражаются катет и гипотенуза.

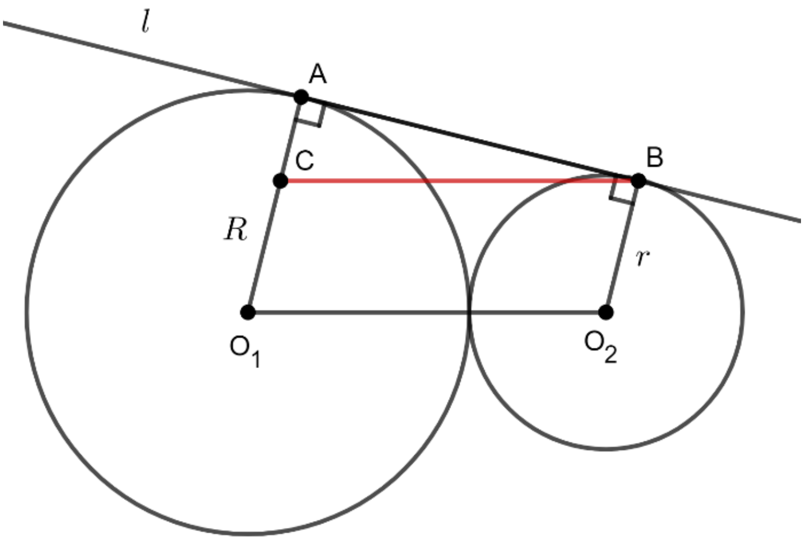


Рис. 18

Приведём тексты задач, несложных по своему решению, в которых используются ключевые задачи (от одной до трёх), и особые приёмы, о которых говорилось в первом параграфе. Предлагаем читателю самостоятельно найти решение этих задач. Проверить свои умозаключения можно, заглянув в презентацию «Ключевые задачи», где решение задач представлено пошагово. Возможно, вам удастся найти более простой способ решения. Нумерацию задач продолжим.

19. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность, K – точка пересечения диагоналей ABCD. Через K, A, B проходит окружность, пересекающая BC в точке M, AD – в точке N. Докажите, что KN=KM.

20. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, D, C и P – точка пересечения касательных – лежат на одной окружности.

21. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна BC.

22. Через середину C дуги AB проведены две прямые CD и CE, пересекающие хорду AB в точках H и F. Докажите, что около четырёхугольника DHFE можно описать окружность.

23. В угол вписаны две окружности. A и B – точки касания первой окружности со сторонами угла, A_1 и B_1 – точки касания второй окружности со сторонами угла. Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Докажите, что AC=B_1C_1 (рис. 19).

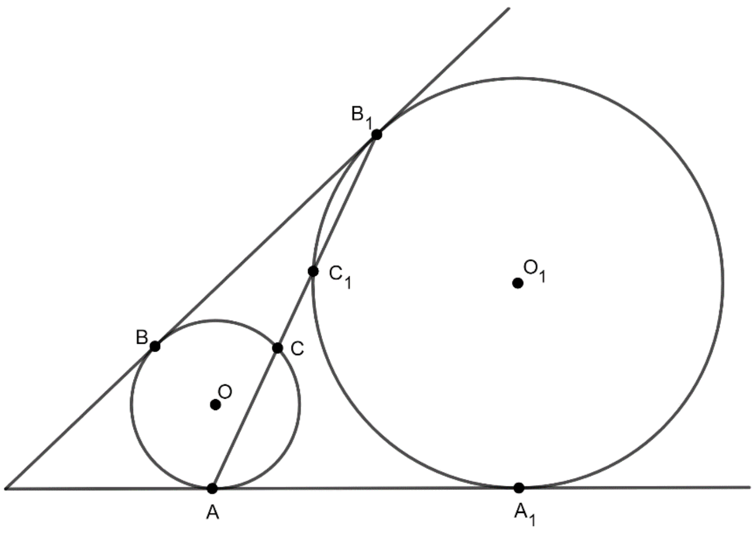


Рис. 19

24. На общей хорде двух пересекающихся окружностей взята точка M и через неё проведены хорды AB и CD. Докажите, что угол MDB равен углу MAC.

25. Окружности касаются внутренним образом (рис. 20). A – точка касания окружностей, P – точка касания хорды BC и меньшей окружности, BA и CA – хорды большей окружности, пересекающие меньшую в точках K и M соответственно. Докажите, что BC ∥ KM.

26. Две окружности касаются в точке B (рис. 21). C – точка касания AC и окружности $(O_2; r_2)$, A лежит на окружности $(O_1; r_1)$. Прямая CB пересекает окружность $(O_1; r_1)$ в точке F, прямая AB пересекает окружность $(O_2; r_2)$ в точке K. Докажите, что $AF \parallel KC$.

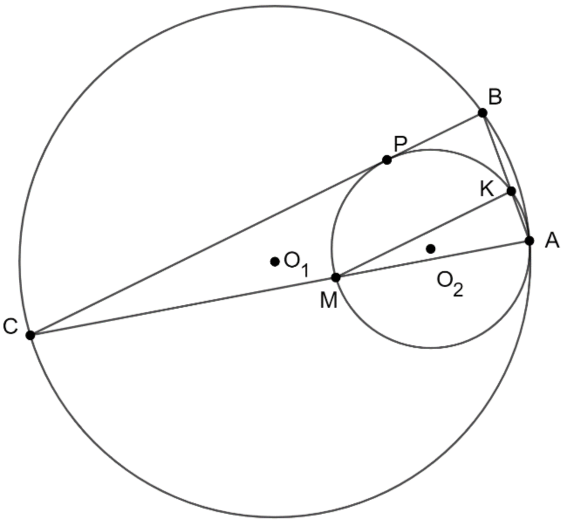


Рис. 20

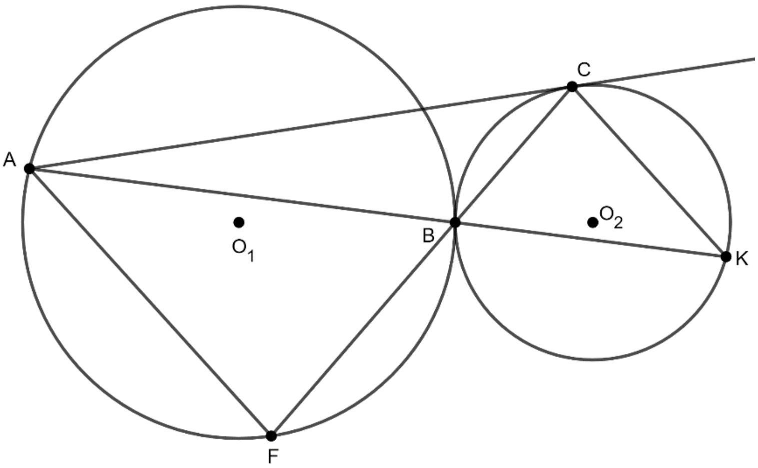


Рис. 21

Перечисленные выше задачи подготавливают учащихся к решению более сложных задач на окружности, в том числе из вариантов единого государственного экзамена. Примеры таких задач с пошаговым решением предложены читателям в презентации «Сложные, но решаемые, задачи на окружности».

В заключение этой части пособия хочется отметить, что решение стереометрической задачи после использования необходимых стереометрических теорем, позволяющих установить взаимное расположение пространственных тел или их частей, сводится к решению планиметрических задач в выделенных плоскостях. Поэтому умение решать планиметрические задачи является основой для решения стереометрических задач. Сложность будет состоять в выделении в пространственном объекте плоскостей, которые следует рассмотреть и выяснении вида и свойств интересующих нас плоских фигур, лежащих в этих плоскостях. Заботиться о том, чтобы учащиеся не боялись стереометрических задач и умели их решать, надо уже в среднем звене. Следует знакомить учащихся с пространственными объектами на наглядно-интуитивном уровне, используя аналогию как метод познания, решать планиметрические задачи, помещая плоские фигуры на грани многогранников, в плоскости сечений многогранников, подбирать и давать учащимся задачи на базовые плоские конфигурации, часто встречающиеся в задачах по стереометрии.

Поясним сказанное. Аналогом задач на окружности, вписанные в окружность и описанные около окружности многоугольники, являются задачи на сферу, вписанные в сферу и описанные около сферы многогранники, вызывающие серьёзные затруднения при их решении даже у хорошо подготовленных учащихся. Представить, сделать чертёж, указать точки касания сферы и граней многогранников, выделить плоскости, связать определёнными отношениями фигуры, лежащие в этих плоскостях и так далее. Это намного сложнее, чем в планиметрии. Но есть и общие моменты. При решении задач на комбинацию окружностей и многоугольников нас интересуют только центр окружности и точки касания со сторонами многоугольника, причём не все, а одна-две. Зачем тогда рисовать всю окружность? Также и при решении задач на комбинации многогранников и сфер не надо изображать сферу, вписанную в многогранник или описанную около многогранника. Это сложно и всё равно хорошо не получиться. Лучше поступать следующим образом. Выполнить чертеж многогранника, указать положение центра сферы и точек касания с плоскостью основания и боковой гранью для вписанной сферы, положение центра сферы и радиусы сферы, содержащие вершину основания и вершину пирамиды для описанной сферы. Переходя к рассмотрению конкретных плоскостей, не лишним будет выполнение выносных чертежей для получаемых планиметрических задач. При решении таких задач появляется и ряд базовых конфигураций, рассмотрение которых позволяет решить задачу. Продемонстрируем сказанное на примерах. Допустим, в задаче речь идет о сфере, вписанной в правильную треугольную пирамиду. К задаче после небольшого обсуждения выполняется следующий чертеж (рис. 22). В ходе обсуждения определяем положение центра сферы и точек касания с плоскостью основания и боковой гранью. Центр лежит на высоте пирамиды, точка касания с основанием – это основание высоты пирамиды, точка касания с боковой гранью лежит на апофеме.

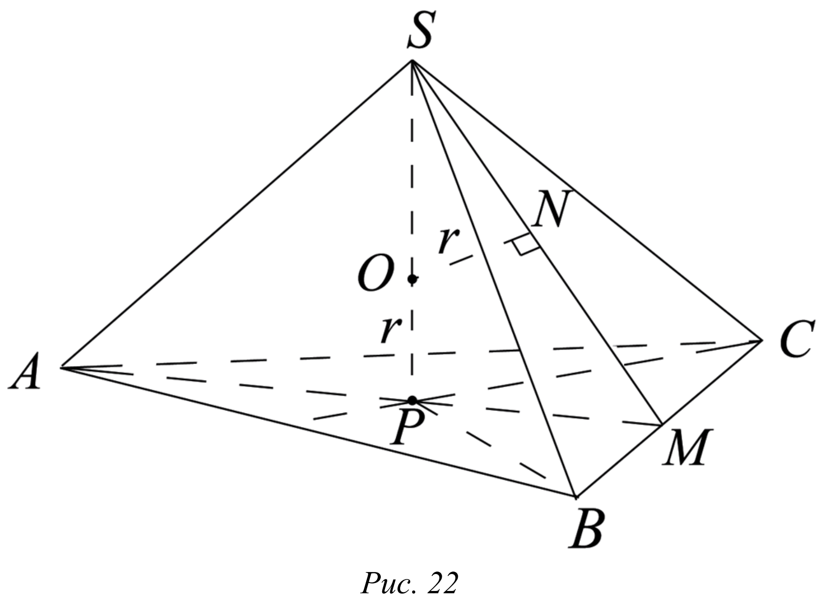


Рис. 22

Если в ходе решения задачи появляется необходимость рассмотреть плоскость *ASM*, то делается выносной чертеж, представленный на рисунке 23.

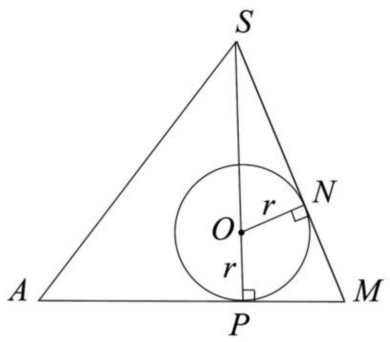


Рис. 23

Базовая конфигурация, к рассмотрению которой, как правило, сводится решение задач на сферы, вписанные в правильные *n*-угольные пирамиды, – треугольная пирамида, в основании которой равнобедренный треугольник (боковые стороны – это радиусы описанной около основания данной *n*-угольной пирамиды окружности), а боковое ребро, проходящее через общую точку равных сторон основания – высота данной пирамиды. Для пирамиды, изображенной на рисунке 22, это пирамида *SPBC*.

Если в задаче речь идет о сфере, описанной около правильной треугольной пирамиды, то к задаче после обсуждения выполняется чертеж, представленный на рисунке 24.

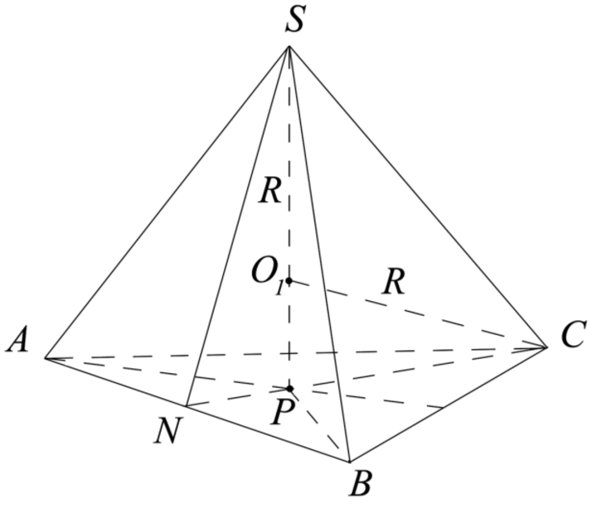


Рис. 24

Если в ходе решения появляется необходимость рассмотреть плоскость *SNC*, то делается выносной чертеж, представленный на рисунке 25.

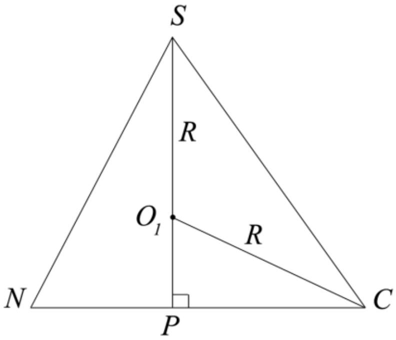


Рис. 25

Базовая конфигурация, к рассмотрению которой, как правило, сводится решение задач на сферы, описанные около правильной n-угольной пирамиды – это также пирамида $SPBC$. Надо помнить, что центры вписанной и описанной сфер в общем случае совпадают только у правильного тетраэдра.

Выносные чертежи полезно делать для любой неэлементарной стереометрической задачи, если возникают затруднения с представлением плоских фигур, лежащих в рассматриваемых плоскостях. Выполняя выносной чертеж, обучающиеся анализируют задачу, уже сделанные по ходу ее решения заключения. У них создается правильное представление о том, какой вид имеет рассматриваемая плоская фигура и какими свойствами она обладает. При этом необходимо соблюдать все требования, предъявляемые к чертежу в планиметрии.

Какие же задачи можно предлагать в средней школе, чтобы подготовить к решению задач на комбинацию сферы с многогранниками? Основой для составления таких задач являются рисунки 23 и 25. Текст задач может быть следующим.

Задача 1 (рис. 23).

В треугольнике ASM располагается окружность, центр которой лежит на высоте SP и которая касается сторон MS и MA треугольника. Угол SMA равен 60^0, AM=$\frac{4\sqrt{3}}{2}$ и AP : PM = 2 : 1. Найдите радиус окружности.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Задача 2 (рис. 24).

Треугольник SNC располагается внутри окружности, центр O_1 которой лежит на высоте SP треугольника, точки S и C лежат на окружности. Угол SCN равен 60^0, NC=$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и NP : PC = 1 : 2. Найдите радиус окружности.

Ответ: 2.

Для того чтобы получить похожую задачу, надо взять из задачника стереометрическую задачу на комбинацию сферы и многогранника (в данном случае правильной треугольной пирамиды), выделить интересующую вас конфигурацию, получить интересующие данные и сформулировать на их основе планиметрическую задачу. Две предложенные задачи были получены на основе рассмотрения первых задач второго и первого вариантов к теме «Комбинации сферы с другими геометрическими телами» из сборника задач «Задачи к урокам геометрии. 7-11 класс» Зива Б. Г. Надо только, чтобы важная для дальнейшего изучения конфигурация встречалась неоднократно. Условия необходимо менять и числовые данные тоже.

Итак, во второй части пособия мы рассмотрели ключевые задачи по интересующей нас теме, показали, как они используются при решении более сложных задач. Пора приступать к решению задач высокого уровня сложности, представленных в презентации «Сложные, но решаемые, задачи на окружности».

Желаем успеха!

Учебное издание

Кондрушенко Елена Михайловна
Крет Анна Дмитриевна

Ох, уж эти окружности!

Учебно-методическое пособие

Редактор и ответственный за выпуск Копылова Е.С.

Подписано в печать 22.12.2021.
Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 3,75.

Макет подготовлен МАУ МООД «ИОМКР»
Великий Новгород, ул. Зелинского, д. 30
Тел. (8162)644-309