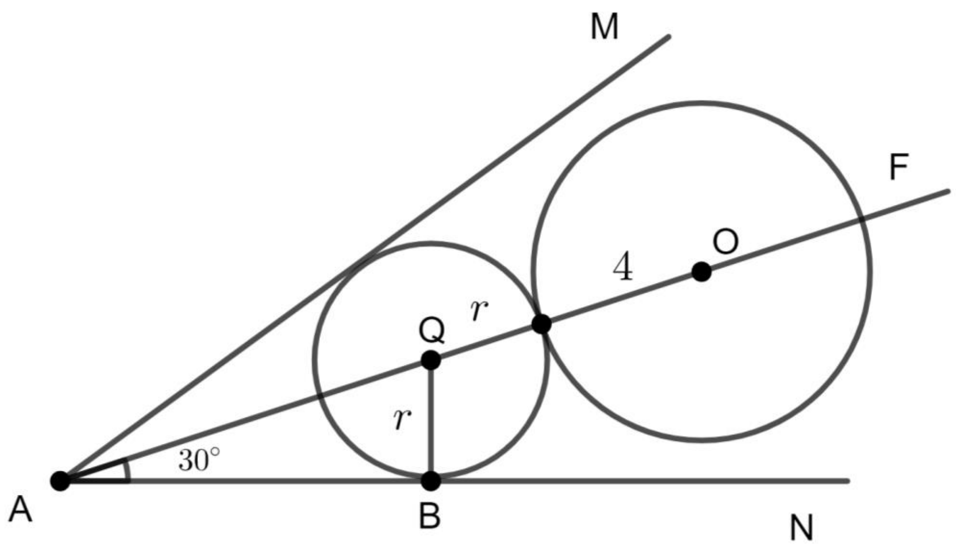
Сложные, но решаемые, задачи на окружности

КОНДРУШЕНКО Е.М.
КРЕТ А.Д.

Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.



- Дано: $\angle MAN = 60°$, $AF -$ биссектриса $\angle MAN$, Окр.$(O, 4)$, $O \in AF$, Окр.(Q, r) вписана в $\angle MAN$, Окр.(Q, r) касается Окр.$(O, 4)$, $AO = 10$

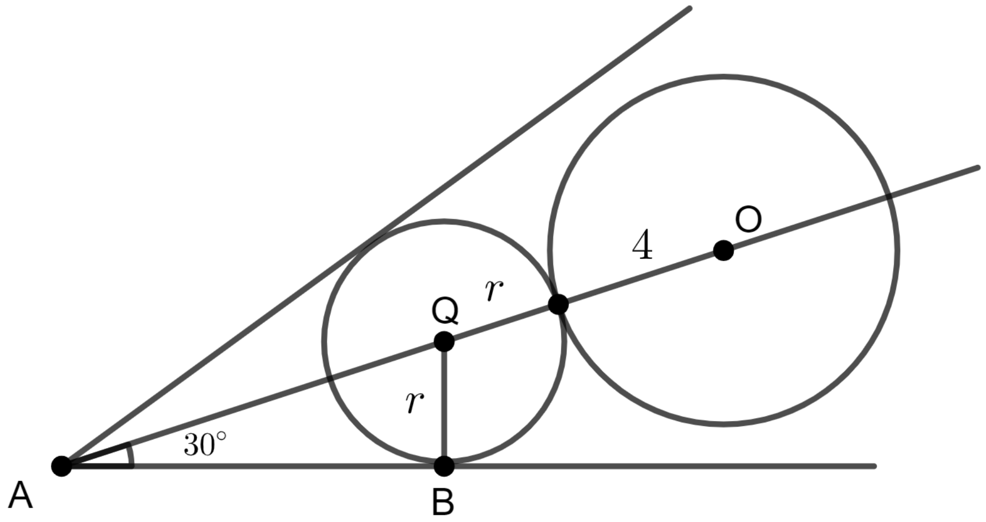
- Найти: r

- Решение:

Пусть Q −центр вписанной окружности радиуса r, точка B − точка касания с одной из сторон угла с вершиной A.

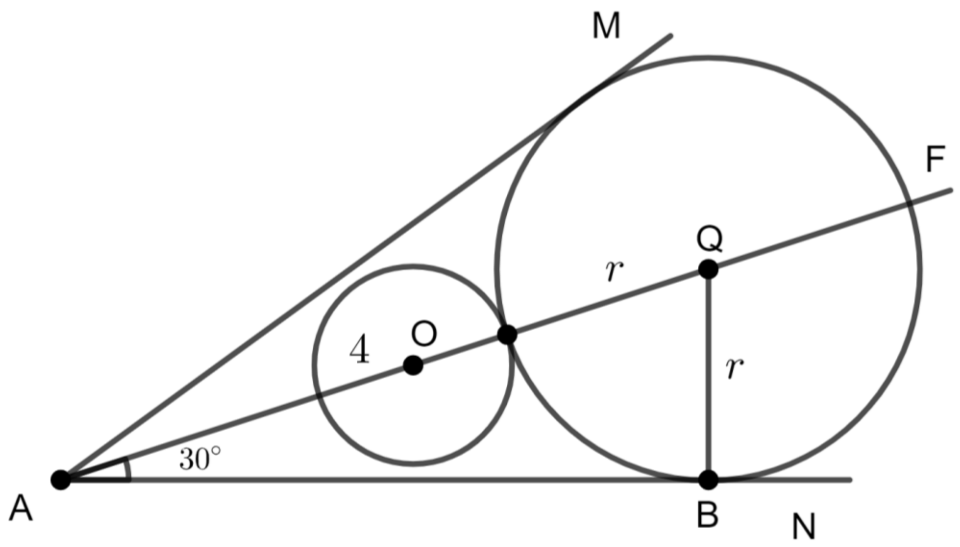
$\angle BAQ = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$, из ΔAQB $AQ = 2 \cdot r$.

Решение. 1 случай. Окружности касаются внешним образом.



а) Q лежит между A и O, тогда $AO = AQ + QO$ или
$10 = 2 \cdot r + (r + 4)$
$r = 2$

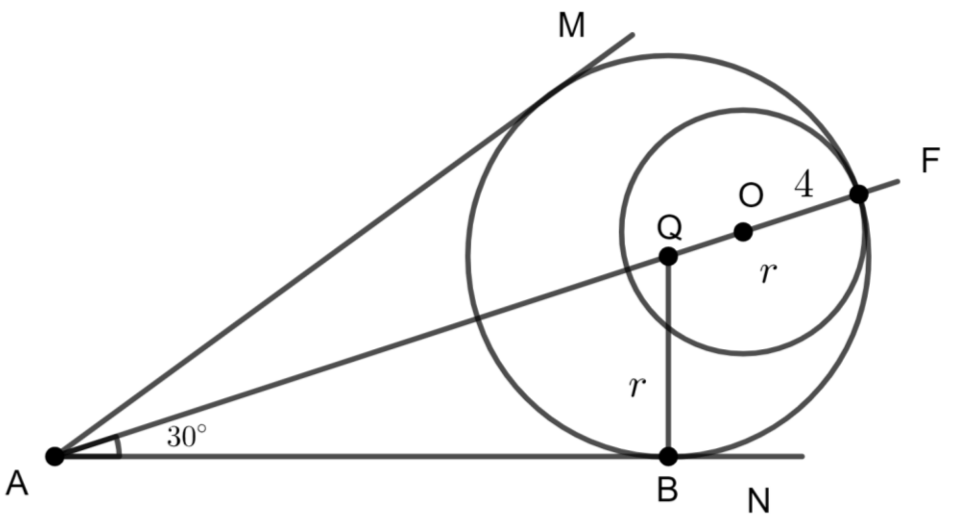
Решение. 1 случай. Окружности касаются внешним образом.



б) O лежит между точками A и Q, тогда
$AQ = AO + QO$ или
$2 \cdot r = 10 + (4 + r)$

$r = 14$

Решение. 2 случай. Окружности касаются внутренним образом.



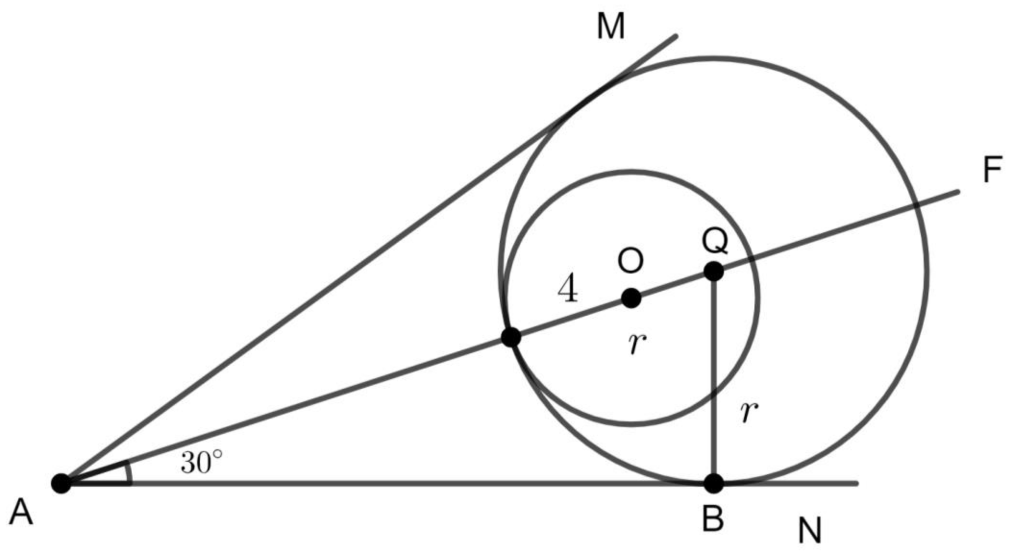
а) Q лежит между точками A и O, тогда

$AO = AQ + QO$ или $10 = 2 \cdot r + (r - 4)$

$r = \frac{14}{3}$

$r = 4\frac{2}{3}$

Решение. 2 случай. Окружности касаются внутренним образом.



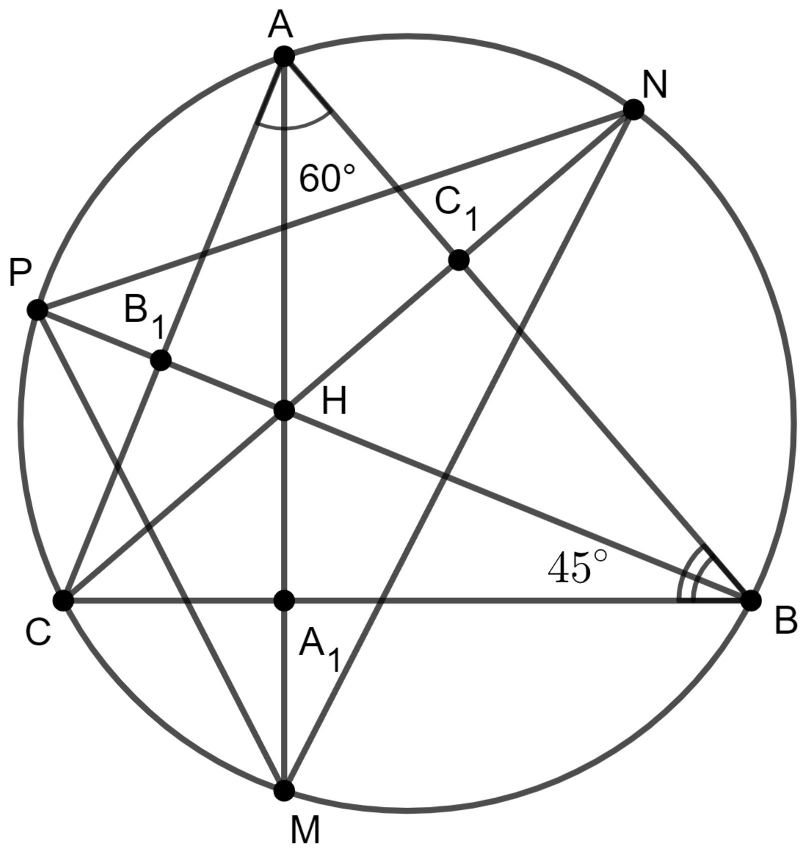
б) O лежит между точками A и Q, тогда

или $2 \cdot r = 10 + (r - 4)$

$r = 6$

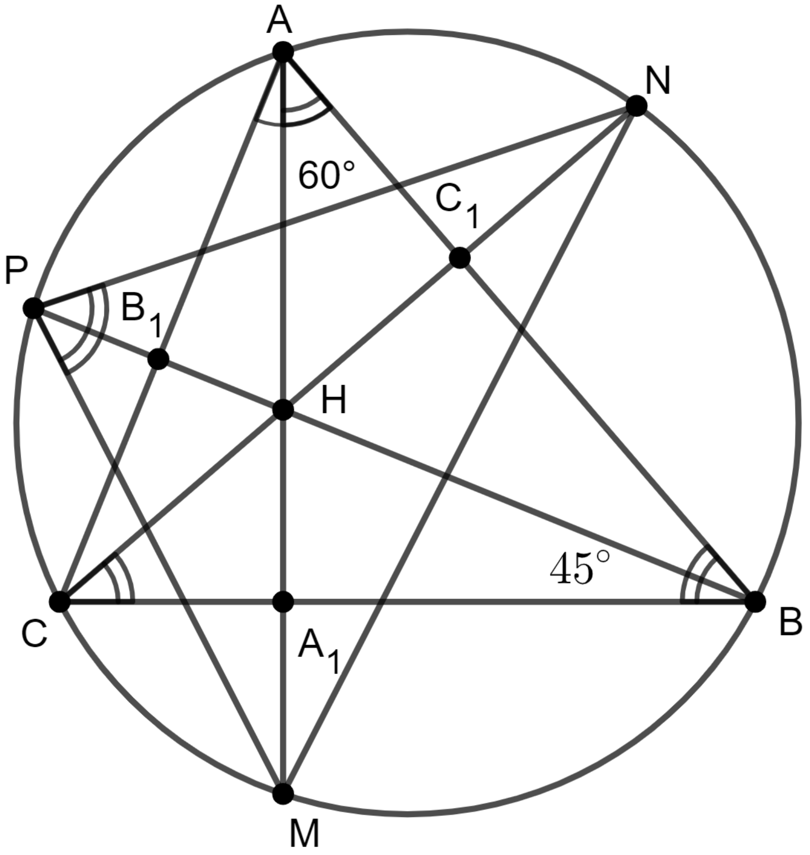
2

В треугольнике ABC известно, что угол BAC равен 60 градусам, угол ABC равен 45 градусам. Продолжение высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M,N,P. а) Докажите, что треугольник MNP прямоугольный. б) Найдите площадь треугольника MNP, если известно, что BC=6



- Дано: ΔABC вписан в Окр. (O, r), $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 45°$, $AA_1 \perp BC$, $CC_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AC$, AA_1 пересекает Окр. (O, r) в точке M, BB_1 пересекает Окр. (O, r) в точке P, CC_1 пересекает Окр. (O, r) в точке N
- Доказать: ΔMNP —прямоугольный
- Найти $S_{\Delta MNP}$, если $BC = 6$

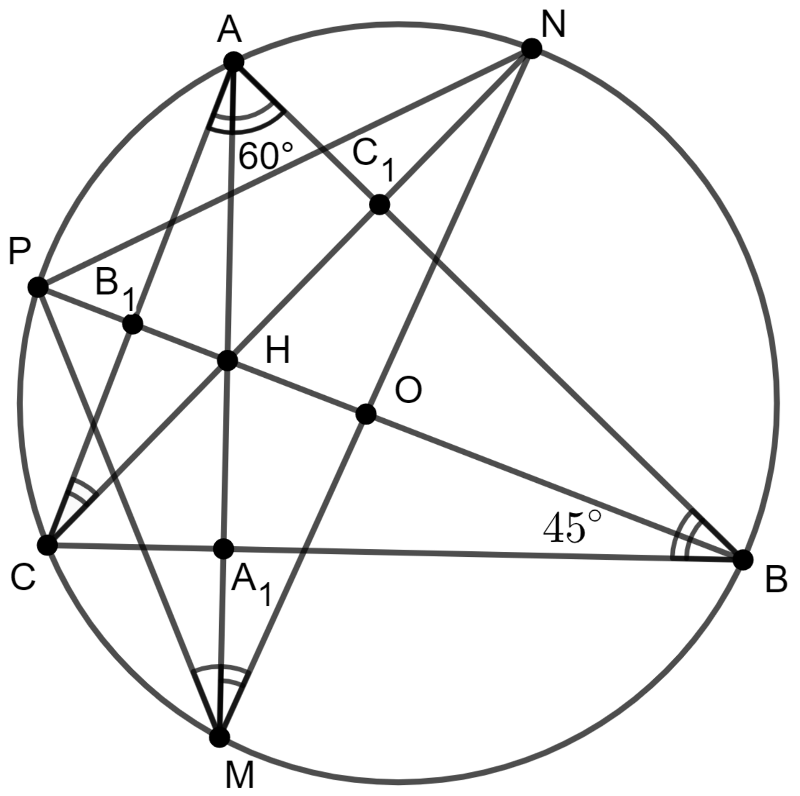
Доказать, что ΔMNP – прямоугольный.



В ΔAA_1B $\angle AA_1B = 90°$, $\angle ABA_1 = 45°$, тогда $\angle A_1AB = \angle MAB = 90° - 45° = 45°$.
В ΔCC_1B $\angle CC_1B = 90°$, $\angle CBC_1 = 45°$, тогда $\angle BCC_1 = \angle BCN = 90° - 45° = 45°$, но
$\angle MPB = \angle MAB = \frac{1}{2} \cup MB$,
$\angle BPN = \angle BCN = \frac{1}{2} \cup BN$.

Значит, $\angle MPN = \angle MPB + \angle BPN = \angle MAB + \angle BCN = 45° + 45° = 90°$. Следовательно, ΔMPN – прямоугольный.

Найти $S_{\Delta MNP}$, если $BC = 6$.



R – радиус описанной около ΔABC окружности. Тогда

$$2R = \frac{BC}{sin\angle CAB} = \frac{6}{sin60°} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

$R = 2\sqrt{3}$, $MN = 2R = 4\sqrt{3}$, т.к. по доказанному $\angle MPN = 90°$

$\angle ACB = 180° - (\angle CAB + \angle ABC) = 180° - 105° = 75°.$

Тогда из прямоугольного ΔCB_1B,

$\angle CBP = 90° - \angle B_1CB = 90° - 75° = 15°,$

$\angle ABP = \angle ABC - \angle CBP = 45° - 15° = 30°,$

$\angle PMA = \angle ABP,$ значит $\angle PMA = \angle ABP = 30°.$

Из прямоугольного ΔACC_1 $\angle ACC_1 = 90° - \angle CAB = 90° - 60° = 30°.$

$\angle AMN$ и $\angle ACC_1$ вписанные, опираются на $\cup AN$,

значит, $\angle AMN = \angle ACC_1 = 30°.$

Тогда $\angle PMN = \angle PMA + \angle AMN = 30° + 30° = 60°,$

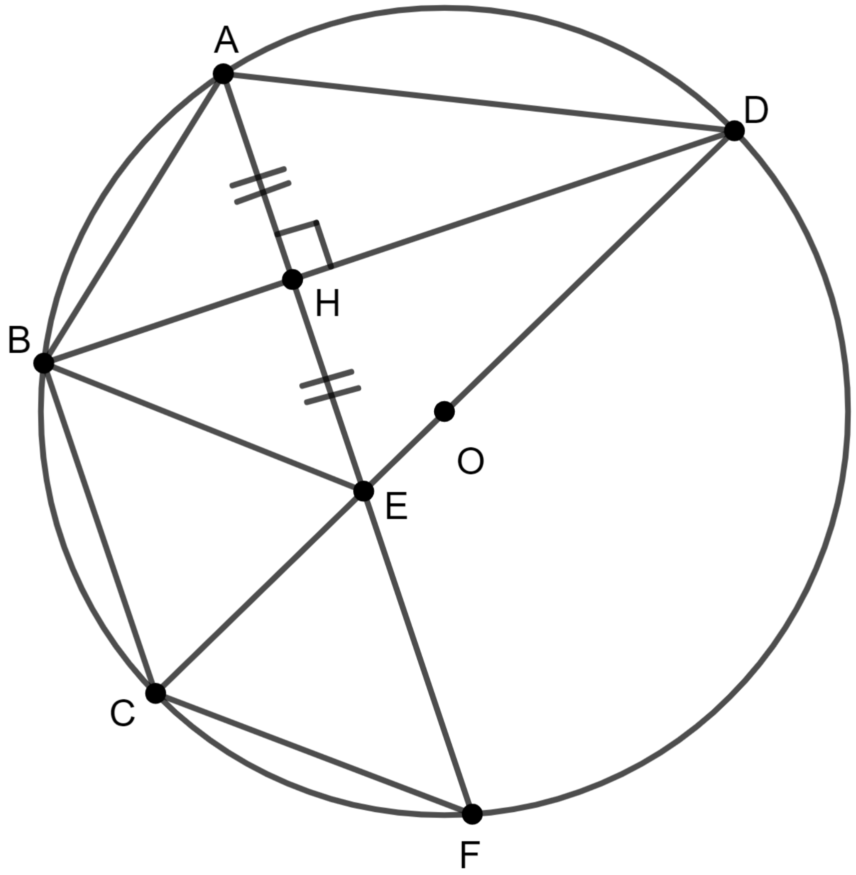
но в ΔMNP $\angle MPN = 90°$, значит, $\angle PNM = 90° - 60° = 30°,$

$PM = \frac{1}{2}MN = R = 2\sqrt{3}.$

Следовательно, $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} PM \cdot MN \cdot sin\angle PMN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$

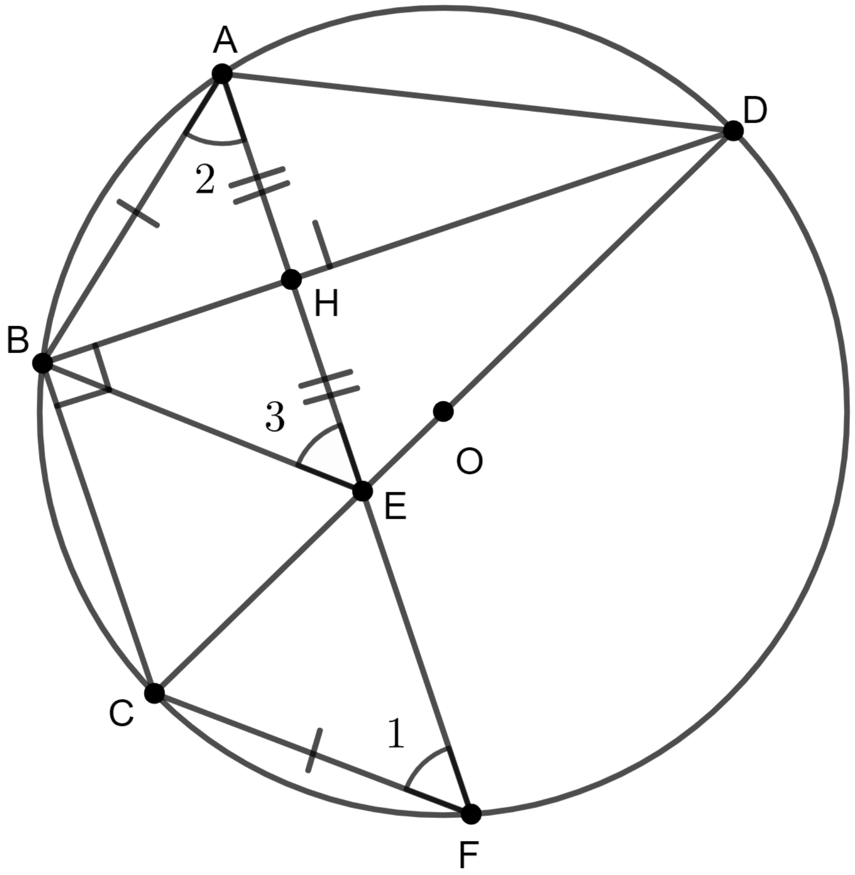
3

Четырёхугольник ABCD вписан в окружность, причём сторона CD-диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность- в точке F, причём H-середина AE.
а) Докажите, что четырёхугольник BCEF-параллелограмм. б) Найдите площадь четырехугольника ABCD, если известно, что AB=6 и AH=$2\sqrt{5}$.



- Дано: Окр.(O,R), $ABCD$ —вписан в Окр.(O,R), CD —диаметр, $AH \perp BD$, $AH = HE$, $E \in CD$, AH пересекает Окр.(O,R) в точке F.
- Доказать: $BCFE$ — параллелограмм
- Найти S_{ABCD}, если $AB = 6$, $AH = 2\sqrt{5}$

Доказать, что $BCFE$ – параллелограмм.



$BC \perp BD$, так как CD –диаметр.

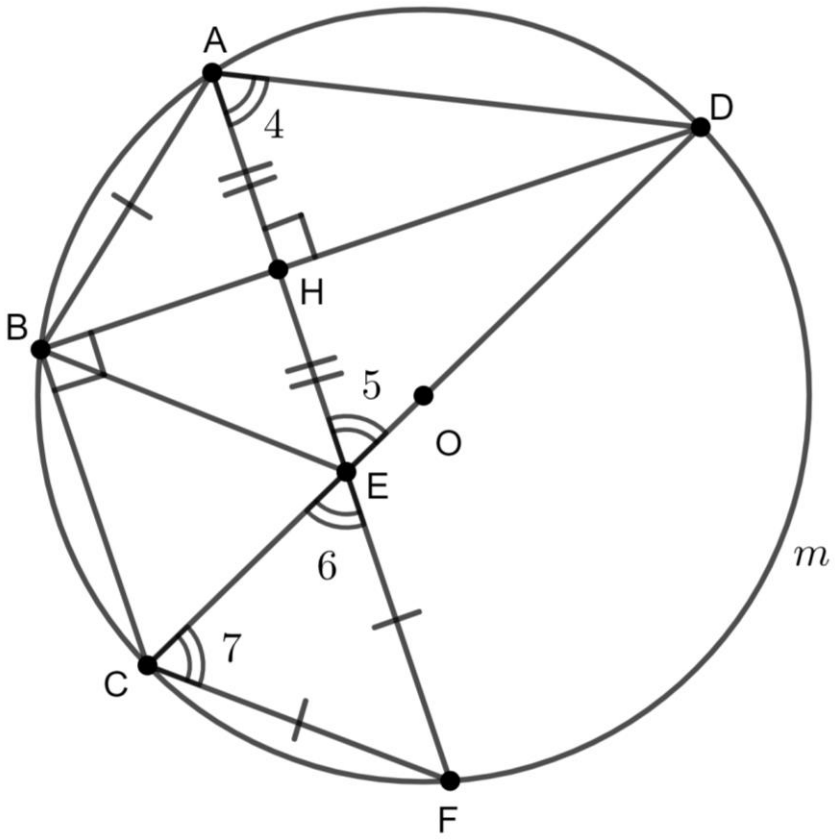
$AF \perp BD$ по условию.

Тогда $BC \parallel AF$, $AB = CF$, $ABCF$ –равнобедренная трапеция и $\angle 1 = \angle 2$. $AH \perp BH$, $AH = HE$, тогда ΔABE –равнобедренный ($AB = BE$) и $\angle 2 = \angle 3$.

Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ соответственные при пересечении BE и CF секущей AF. Тогда $BE \parallel CF$.

$BC \parallel EF, BE \parallel CF$, значит, $BCFE$ –параллелограмм.

Найти S_{ABCD}, *если* $AB = 6,\ AH = 2\sqrt{5}.$



$\angle 4 = \angle 5$, так как в $\Delta ADE\ HD$ –высота и медиана.

Но $\angle 4 = \angle 7$ как вписанные в окружность, опирающиеся на $\cup DmF$, а $\angle 5 = \angle 6$ –вертикальные.

Значит, $\angle 6 = \angle 7$, $BCFE$ – параллелограмм и $CF = FE$, значит $BCFE$ –ромб. BH – высота $BCFE$.

Из ΔABH $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 20} = 4$. $EF = BE = AB = 6$

Тогда $S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} S_{BCFE} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. $HF = HE +$
$+ EF = 2\sqrt{5} + 6$. $AH \cdot HF = BH \cdot HD$,

$HD = \frac{AH \cdot HF}{BH} = \frac{2\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})}{4} == 3\sqrt{5} + 5.$

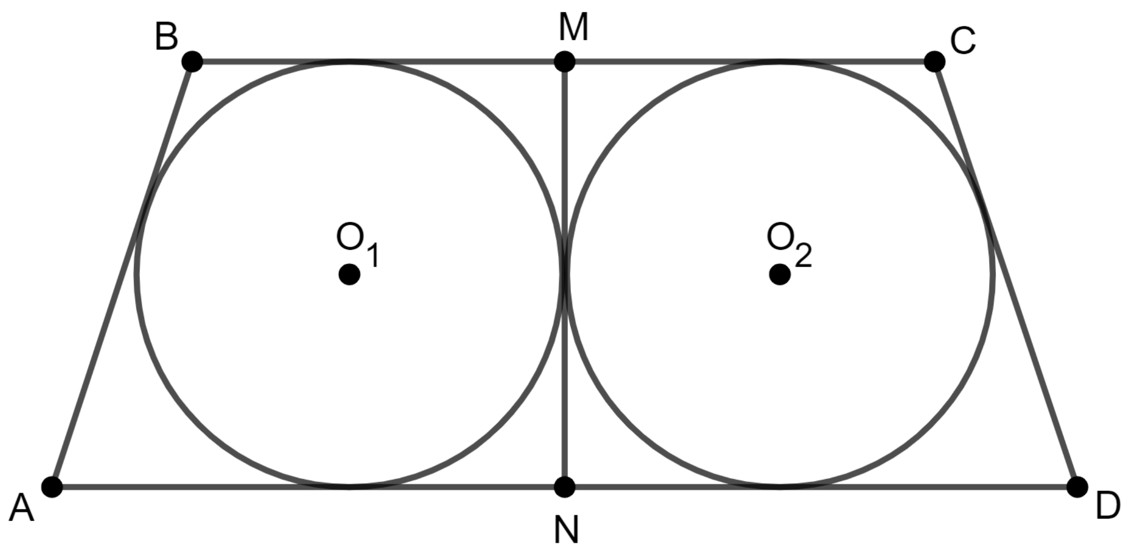
$BD = BH + HD = 4 + (3\sqrt{5} + 5) = 9 + 3\sqrt{5}$, $AE = 4\sqrt{5}$, $AE \perp BD$.

Тогда $S_{ABED} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot (9 + 3\sqrt{5}) = 18\sqrt{5} + 30.$

$S_{ABCD} = S_{\Delta BCE} + S_{ABED} = 12 + 8\sqrt{5} + 30 = 42 + 18\sqrt{5}$

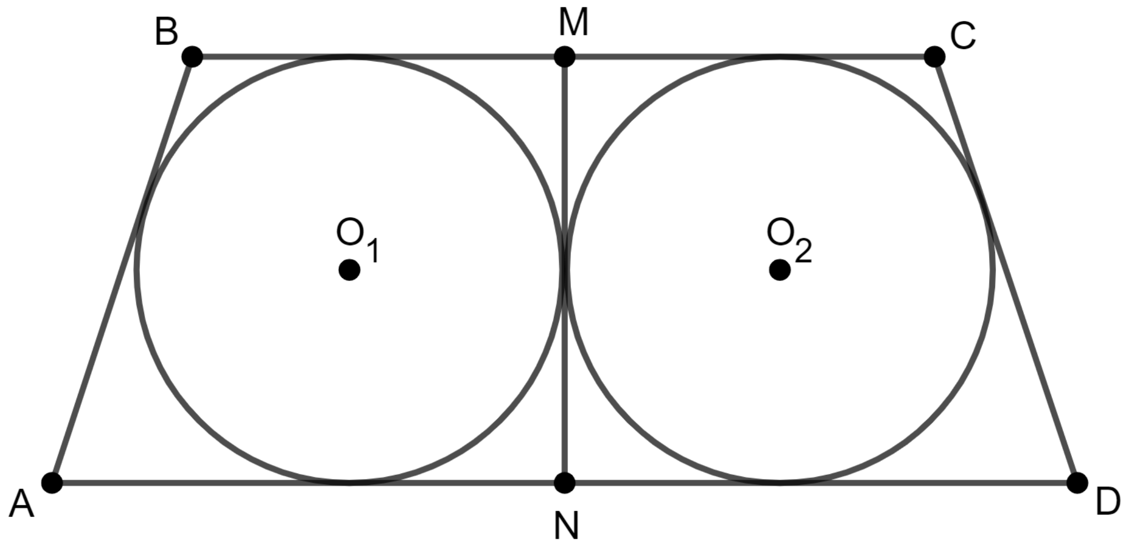
Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции ABCD, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. а) Докажите, что трапеция равнобедренная. б) Известно, что радиус этих окружностей равен 2, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 6. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции ABMN и вписанной в неё окружности.

4



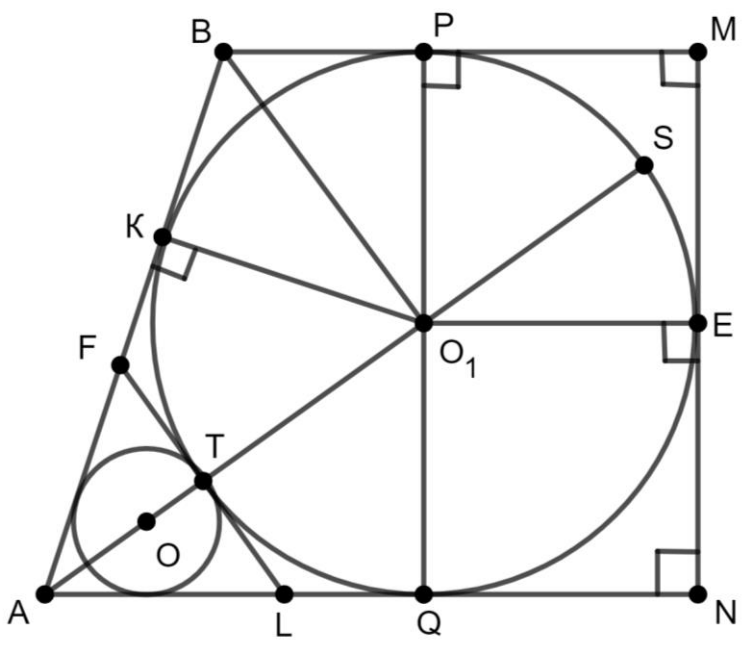
- Дано: $ABCD$ –трапеция, $BC \parallel AD$, $BM = MC, AN = ND$, в $ABMN$ и $NMCD$ можно вписать окружность
- Доказать: $ABCD$ – равнобедренная
- Найти радиус r окружности, касающейся AB, AN и Окр(O, r_1), если $r_1 = 2, BC = 6$

Доказать, что ABCD – равнобедренная трапеция.



$AB + MN = BM + AN$,
$CD + MN = MC + ND$, т.к. в $ABMN$ и в $NMCD$ вписаны окружности,
но $BM = MC$, $AN = ND$,
тогда $AB + MN = CD + MN$ или $AB = CD$ и трапеция $ABCD$ –равнобедренная.
MN –ось симметрии $ABCD$. Следовательно, трапеция $ABMN$ и $NMCD$ равны и окружности, вписанные в них равны.

Найти радиус r окружности, касающейся AB, AN и $Окр(O, r_1)$, если $r_1 = 2, BC = 6$.



$O_1E \perp MN, O_1P \perp BM, O_1Q \perp AN, OK_1 \perp AB, O_1E = O_1P = O_1Q = O_1K = 2$. Тогда $PM = 2, BP = BK = 3 - 2 = 1$. Из ΔKBO_1 $BO_1 = \sqrt{KB^2 + KO_1{}^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

В ΔABO_1 $\angle AO_1B = \frac{1}{2}(\angle QAB + \angle ABP) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°, O_1K \perp AB,$

тогда $BO_1{}^2 = KB \cdot AB, AB = \frac{BO_1{}^2}{KB} = 5, AO_1 = \sqrt{AB^2 - BO_1{}^2} = 2\sqrt{5}, AK = 4.$

Т-точка касания окружностей. Проведём общую касательную к окружностям FL, $FL \perp AO_1$, $FT \parallel BO_1$, т.к. $BO_1 \perp AO_1$. По свойству касательной $AK^2 = AT \cdot AS$ или $16 = AT \cdot (AT + 4), AT^2 + 4AT - 16 = 0, \frac{D}{4} = 20, AT = 2\sqrt{5} - 2, (AT > 0),$

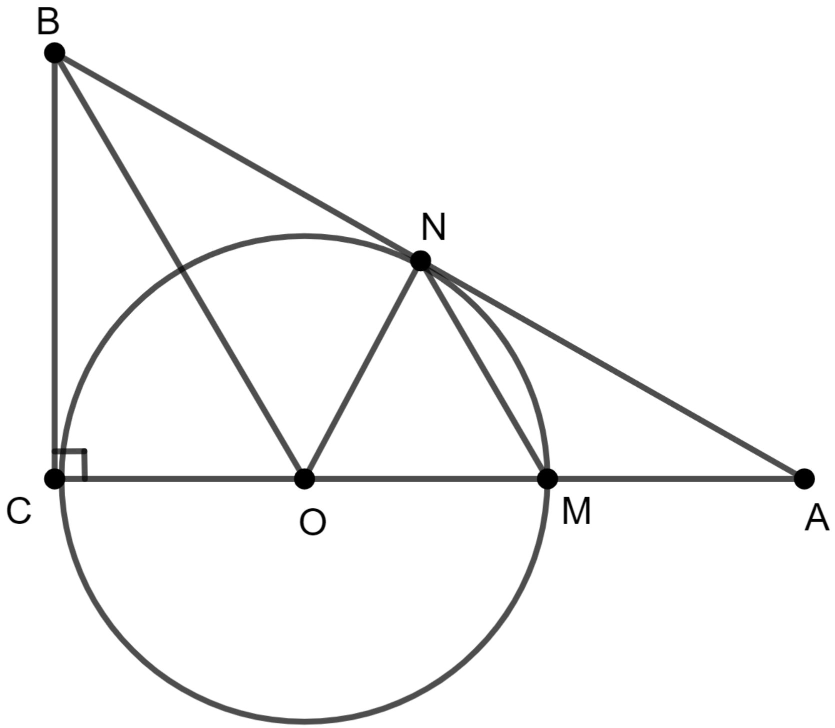
$\Delta ABO_1 \backsim \Delta AFT, \frac{AB}{AF} = \frac{AO_1}{AT}, \frac{5}{AF} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}, AF = \frac{5 \cdot 2(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}, AF = AL = 5 - \sqrt{5}.$

$P_{\Delta AFL} = 2(5 - \sqrt{5}) + 2\sqrt{5} - 2 = 8, S_{\Delta AFL} = \frac{1}{2} FL \cdot AT = \frac{1}{2}\sqrt{AF^2 - AT^2} \cdot 2 \cdot AT = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} \cdot (2\sqrt{5} - 2) = (\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} - 2) = 12 - 4\sqrt{5}.$

$r = \frac{S_{\Delta AFL}}{p} = \frac{12 - 4\sqrt{5}}{4} = 3 - \sqrt{5}.$

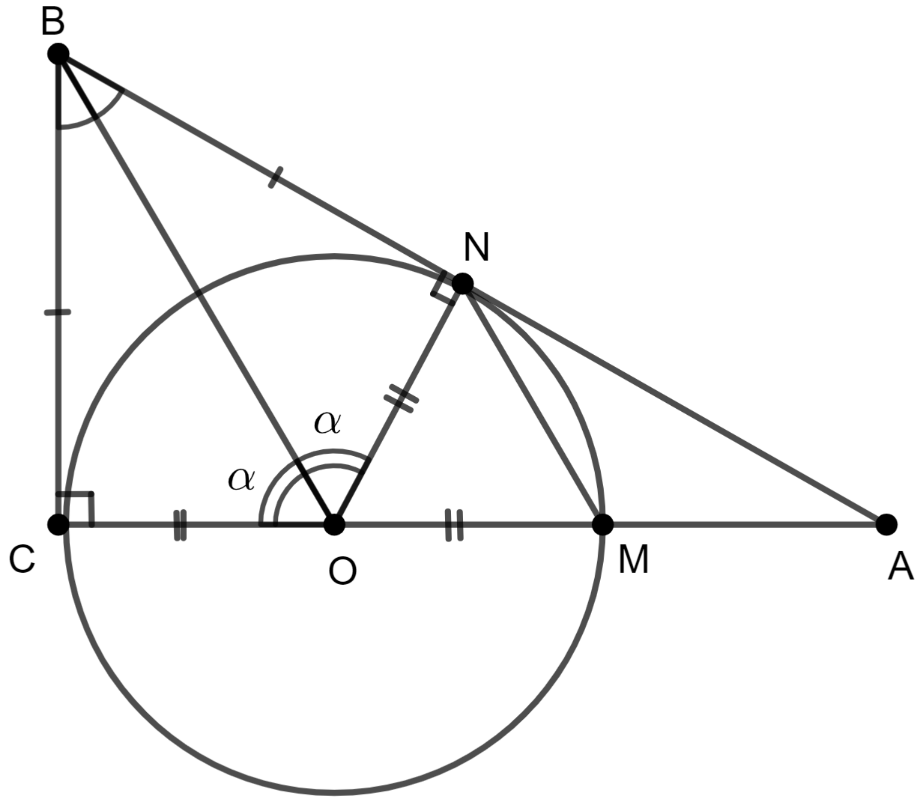
5

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N. а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны. б) Найдите площадь четырехугольника BOMN, если CN=4 и AM:MC=1:3.



- Дано: ΔABC, $\angle BCA = 90°$, Окр.$(O, \frac{CM}{2})$, CM –диаметр Окр.$(O, \frac{CM}{2})$, N –точка касания Окр.$(O, \frac{CM}{2})$ с AB
- Доказать: $BO \parallel MN$
- Найти S_{BOMN}, если $CN = 4$, $AM : MC = 1 : 3$

Доказать что $BO \parallel MN$.



$\angle BON$ обозначим α.

Тогда $\angle COB = \angle BON = \alpha$,

$\angle NOM = 180° - 2\alpha$.

Так как $ON = OM$, то

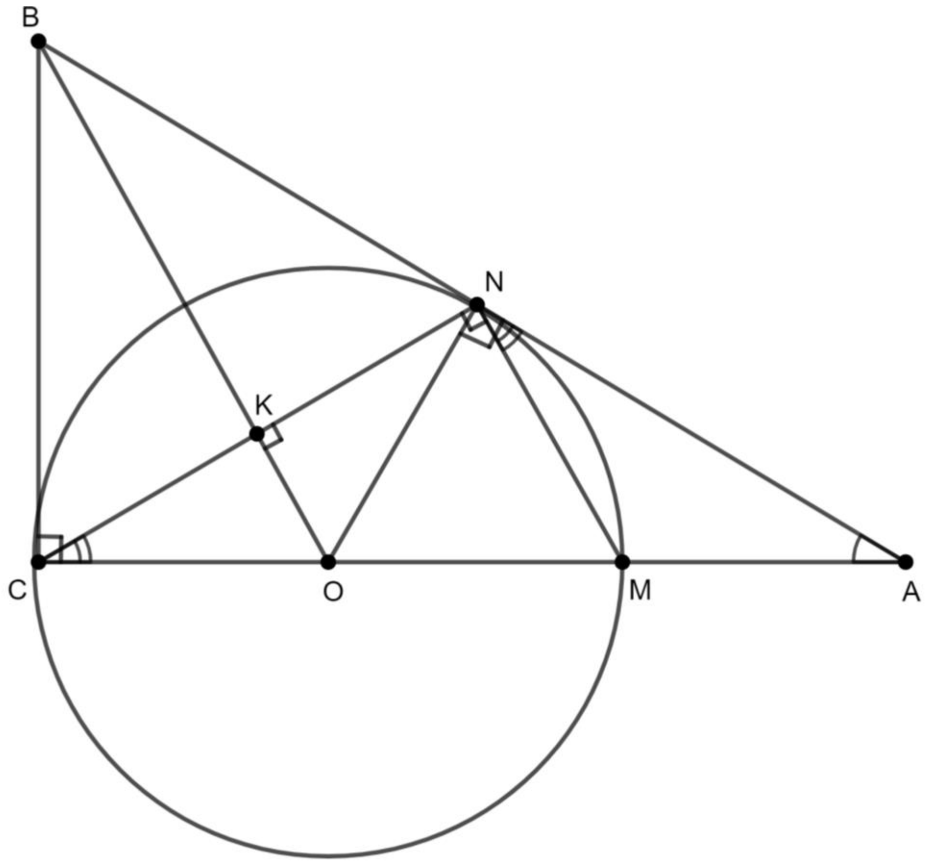
$\angle ONM = \frac{180° - (180° - 2\alpha)}{2} = \alpha$.

$\angle BON$ и $\angle ONM$ – накрест лежащие при пересечении BO и NO секущей ON.

Значит, $BO \parallel MN$.

5

Найти S_{BOMN}, если $CN = 4$, $AM : MC = 1 : 3$.



$BOMN$ –трапеция, $MN \parallel BO$, $BO \perp CN$, $CB \perp CM$, CM – диаметр, тогда BC – касательная к окружности. По свойству касательных $BC = BN$ и $\angle CBK = \angle NBK$, тогда $BK \perp CN$ $(BO \perp CN)$ и $CK = KN$. KN – высота трапеции. $CK = KN = \frac{CN}{2} = 2$.

Пусть $ON = OM = OC = r$. Тогда $MC = 3 \cdot MA = 2r$, $MA = \frac{2r}{3}$.

$AN^2 = AM \cdot AC$, $AN^2 = \frac{2r}{3}\left(2r + \frac{2r}{3}\right) = \frac{16r^2}{9}$, $AN = \frac{4r}{3}$.

Из ΔCNM $MN = \sqrt{4r^2 - 16} = 2\sqrt{r^2 - 4}$. $\Delta CNA \backsim \Delta NMA$ т. к. $\angle NCM = \angle MNA = \frac{1}{2} \cup MN$, $\angle CAN$ – общий. Значит, $\frac{CN}{MN} = \frac{AN}{MA}$,

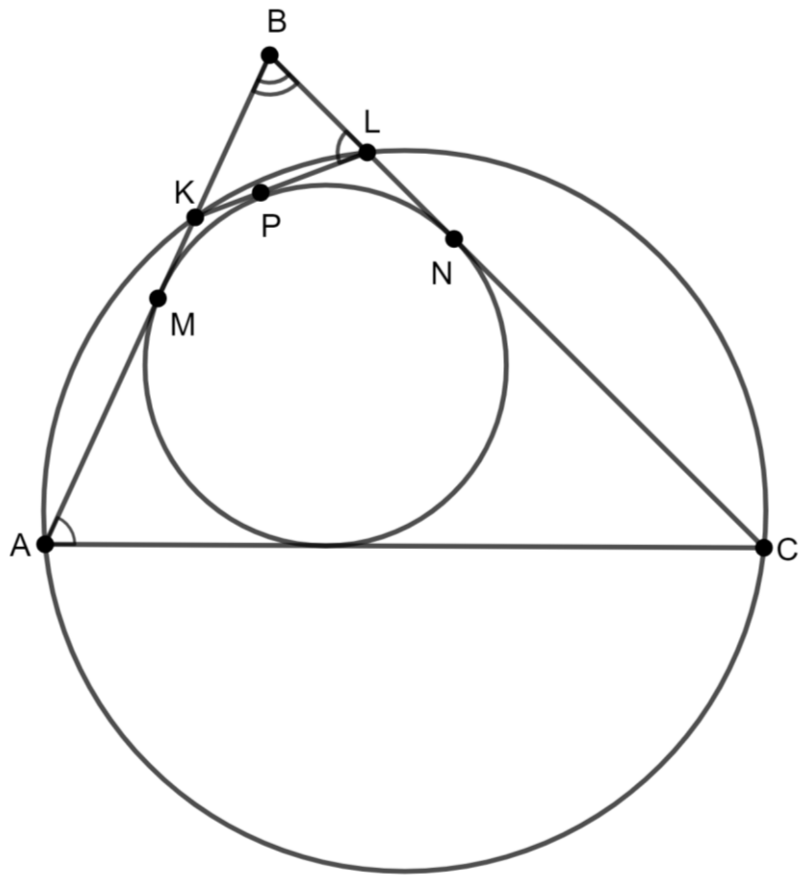
$\frac{4}{2\sqrt{r^2-4}} = \frac{4r\cdot 3}{3\cdot 2r}$, $\sqrt{r^2 - 4} = 1$, $r = \sqrt{5}$, $MN^2 = MC^2 - CN^2 = \sqrt{20 - 16} = 2$.

В ΔONA $\angle ONA = 90°$, $tg\angle OAN = \frac{ON}{AN} = \frac{3}{4}$, но $tg\angle OAN = tg\angle CAB = \frac{BC}{AC}$,

$BC = \frac{3}{4}AC = \frac{8\sqrt{5}}{4} = 2\sqrt{5}$. Из ΔBCO $BO = \sqrt{BC^2 + CO^2} = \sqrt{20 + 5} = 5$.

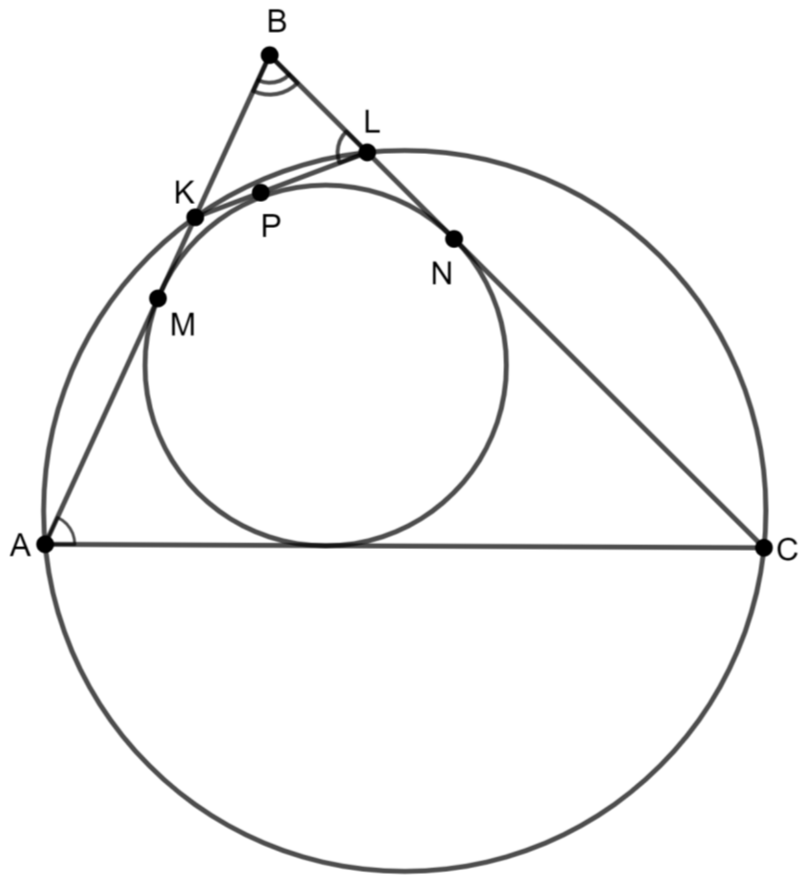
$S_{BOMN} = \frac{BO+MN}{2} \cdot KN = \frac{5+2}{2} \cdot 2 = 7$.

В треугольнике ABC известны стороны: AB=7, BC=8, AC=9. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.



- Дано: ΔABC, $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$, Окр.(O, r) вписана в ΔABC, M – точка касания с AB, N – точка касания с BC, Окр.(O_1, r_1), $A \in$ Окр. (O_1, r_1), $C \in$ Окр. (O_1, r_1), Окр. (O_1, r_1) пересекает BA в точке K, Окр. (O_1, r_1) пересекает BC в точке L, KL касается Окр.(O, r) в точке P
- Найти: KL

Решение.



1 случай:

Точки K и L лежат на сторонах BA и BC ΔABC. $AKLC$ —вписан в Окр. (O_1, r_1),

тогда $\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK$.

$\Delta ABC \backsim \Delta BKL$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle KAC = \angle BLK$).

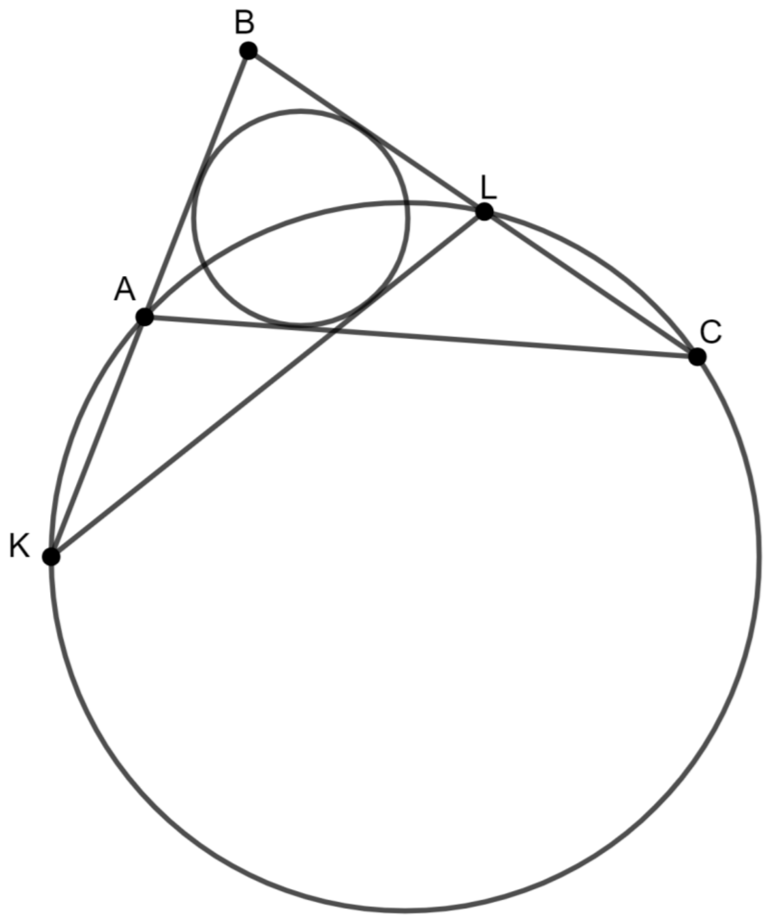
$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 24$.

$P_{\Delta BKL} = BK + KP + PL + BL = BK + KM + BL + LN = BM +$
$+ BN = 2BM = 2(P_{\Delta ABC} - AC) = 2(12 - 9) = 6$,

так как $KP = KM$, $PL = LN$, $BM = BN$ по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки.

Тогда $\frac{KL}{AC} = \frac{P_{\Delta BKL}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $KL = \frac{1}{4}AC = \frac{9}{4}$.

Решение.



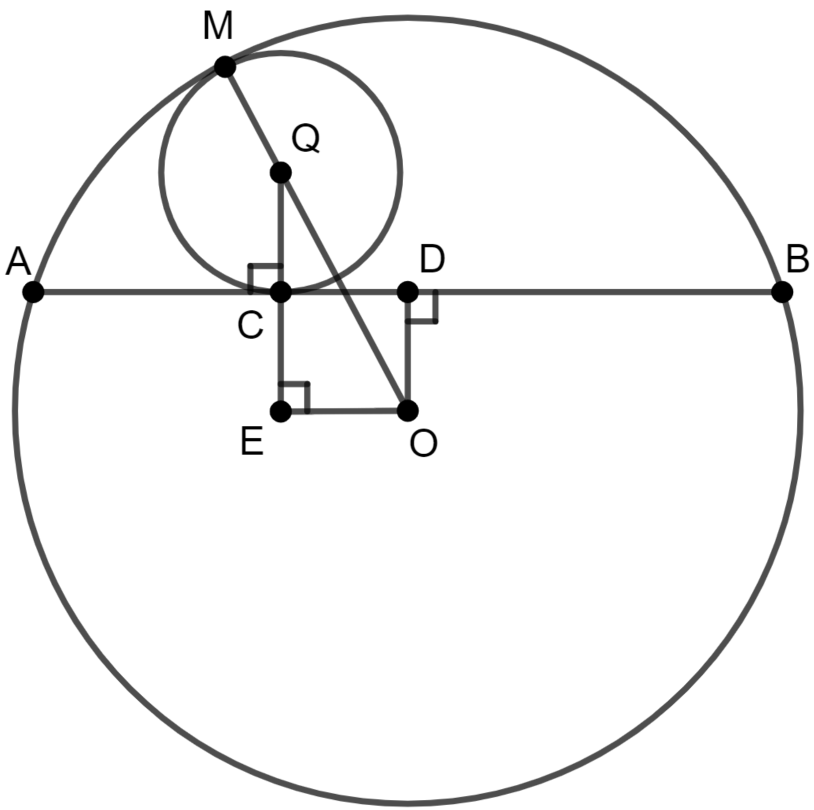
2 случай:

Пусть K лежит на продолжении стороны AB. $\angle AKL = \angle ACL$ –вписанные, опираются на $\cup AL$. Тогда $\Delta ABC \backsim \Delta BKL$ по двум углам ($\angle ABC$ – общий, $\angle ACB = \angle BKL$). Но эти треугольники описаны около одной и той же окружности. Значит, коэффициент подобия равен 1 и треугольники равны. Тогда $KL = AC = 9$, $BK = BC = 8$, $BK > AB = 7$.

3 случай:

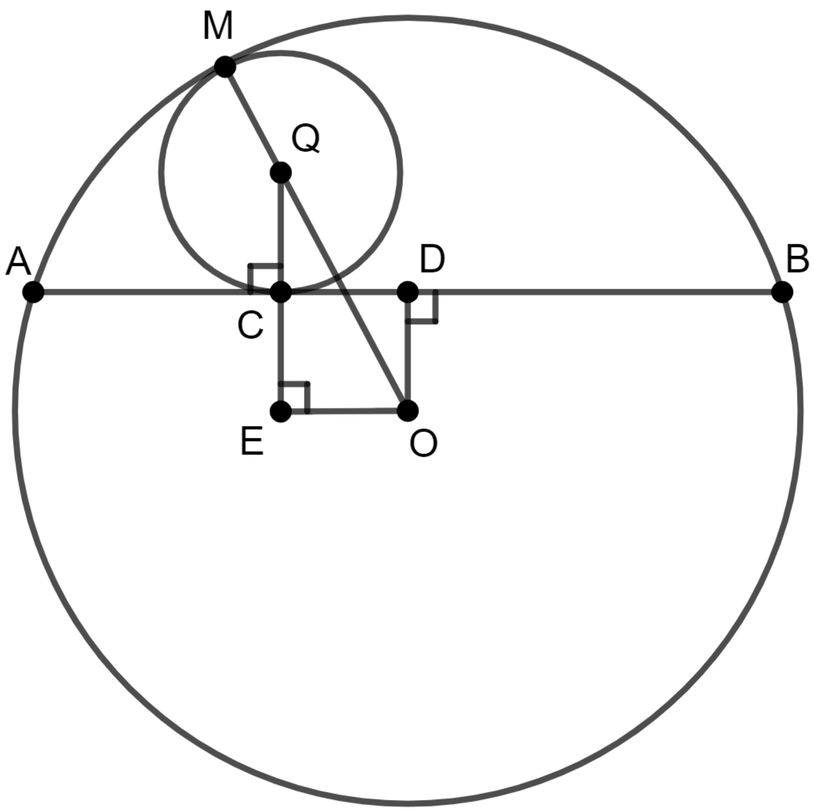
Если точка L лежит на продолжении BC, то $BL > BC$, но аналогично случаю 2 получим $BL = AB < BC$. Значит, такого случая быть не может.

В окружности, радиус которой равен 5, проведена хорда AB=8. Точка C лежит на хорде AB так, что AC:BC=1:2. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности и касающейся хорды AB в точке C.



- Дано: Окр. $(O, 5)$, AB –хорда, $AB = 8$, $C \in AB$, $AC : BC = 1 : 2$, Окр. (Q, r) касается Окр. $(O, 5)$ в точке M, Окр. (Q, r) касается AB в точке C
- Найти: r

Решение.



$OD \perp AB, OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3,$

$AC = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{8}{3},$

$CD = AD - AC = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Проведем $OE \perp CQ, r -$ искомый радиус.

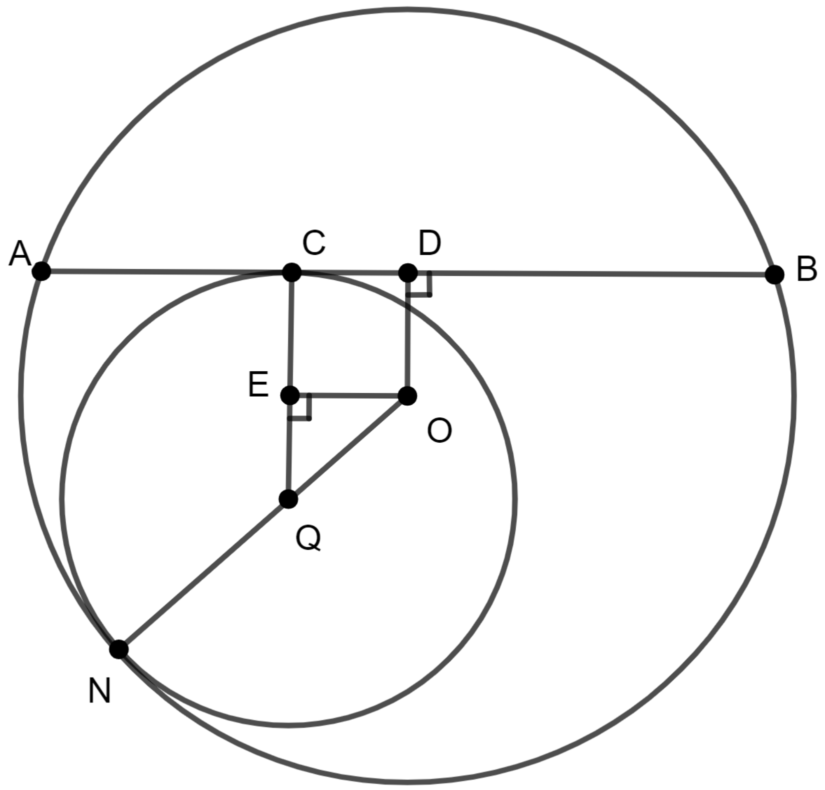
<u>1 случай:</u> Центры окружностей Q и O в разных плоскостях относительно AB.

$MQ = r, MO = 5,$ тогда $QO = 5 - r,$

$QE = QC + CE = r + DO = r + 3, EO = CD = \frac{4}{3}$. В ΔQEO

$QO^2 = QE^2 + EO^2, (5 - r)^2 = (r + 3)^2 + \frac{4}{3}^2, r = \frac{8}{9}$

Решение.



2 случай: Центры окружностей Q и O в одной плоскости относительно AB.

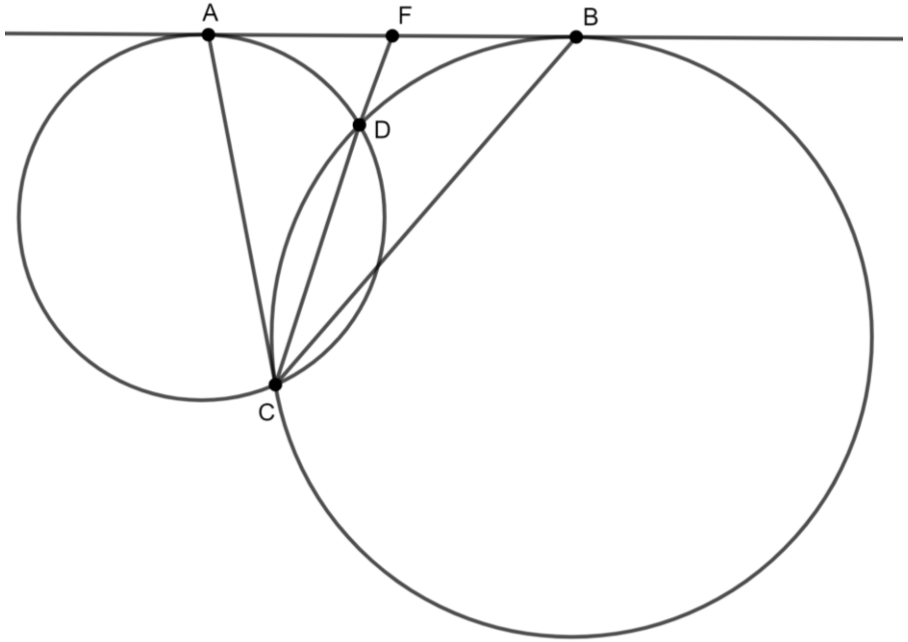
$EO = DC = \frac{4}{3}$, $EQ = CQ - CE = r - DO = r - 3$,

$QO = ON - NQ = 5 - r$, В ΔEOQ $QO^2 = EQ^2 + EO^2$,

$(5-r)^2 = (r-3)^2 + \frac{4}{3}^2$, $r = \frac{32}{9}$

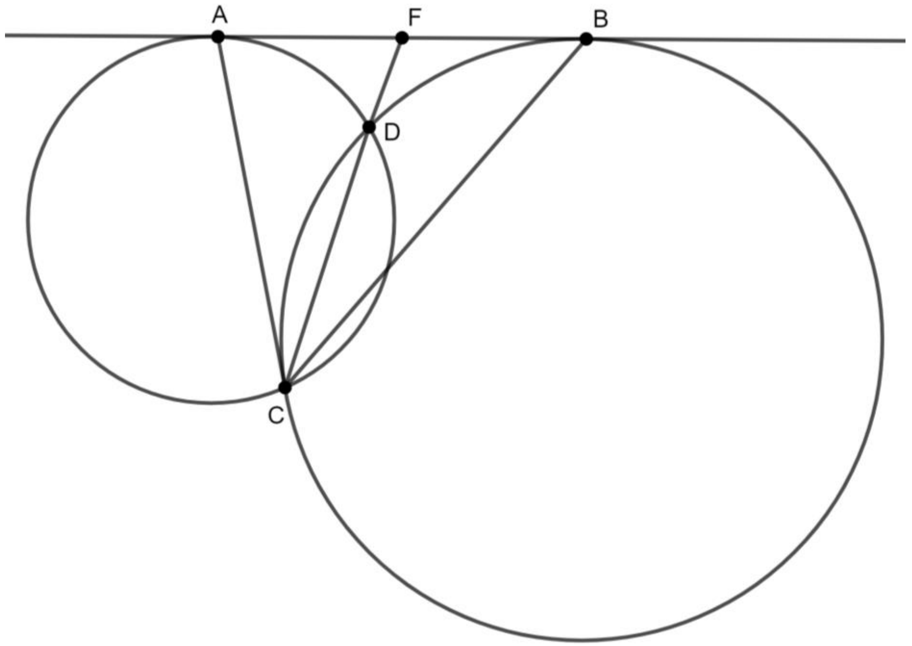
8

Две окружности, касающиеся прямой в точках A и B, пересекаются в точках C и D, причём AB=21, CD=20. Найдите медиану CE треугольника ABC.



- Дано: Окр. (O, r) и Окр. (O_1, r_1) пересекаются в точках C и D, AB — общая касательная, A — точка касания с Окр. (O, r), B — точка касания с Окр. (O_1, r_1), $AB = 21$, $CD = 20$, CE — медиана ΔABC
- Найти: CE

Решение.



Если F —точка пересечения CD и AB, то $AF^2 = FC \cdot FD = FB^2$.

Тогда $AF = FC = \frac{21}{2}$ и F совпадает с E.

Возможны два случая: C лежит между E и D, D лежит между E и C. Пусть x —длина меньшего из отрезков EC и ED. Тогда используя теорему о секущей и касательной получаем

$(\frac{21}{2})^2 = x(x+20)$, $(x+20)$ —длина большего из отрезков.

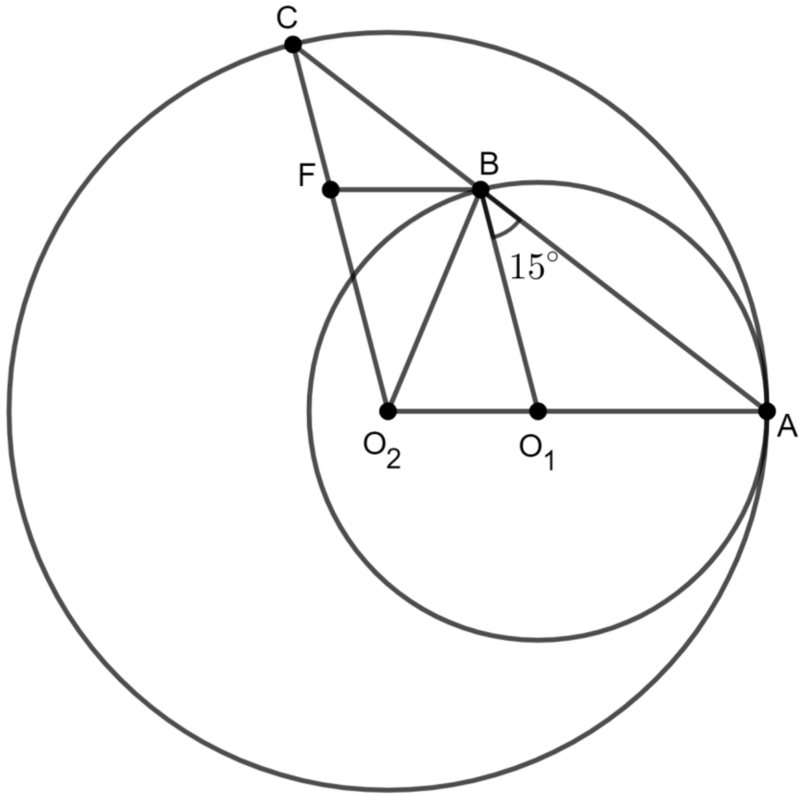
$x^2 + 20x - \frac{441}{4} = 0$, $x = \frac{-20+29}{2}$.

Поэтому $CE = x$ или $CE = x + 20$.

Ответ: 24,5 или 4,5.

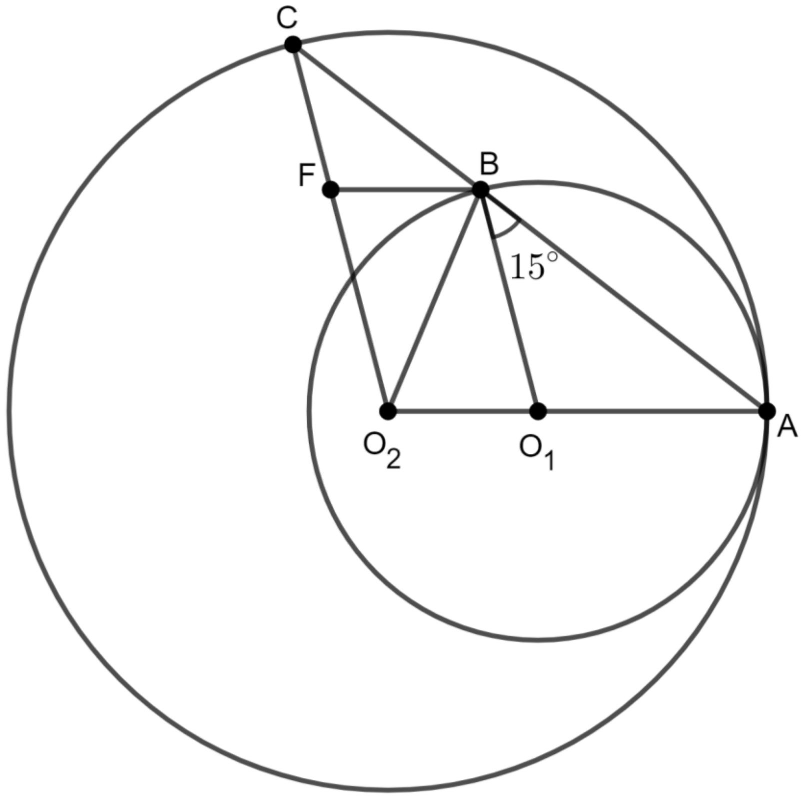
9

Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую- в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 15°$.



- Дано: Окр. $(O_1, 3)$, Окр. $(O_2, 5)$, A – точка касания окружностей, $B \in$ Окр. $(O_1, 3)$, AB пересекает Окр. $(O_2, 5)$ в точке C, $\angle ABO_1 = 15°$
- Найти: $S_{\Delta BCO_2}$

Решение. 1 случай. Окружности касаются внутренним образом.



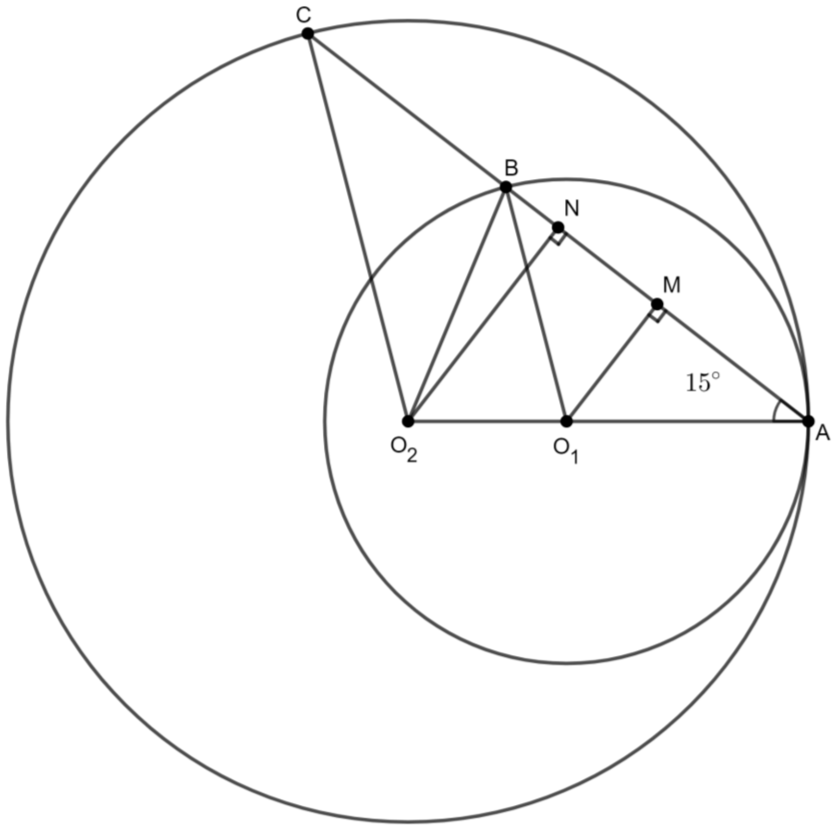
1 способ:

$O_1B = O_1A = 3$, $\angle O_1BA = 15°$, тогда $\angle BAO_1 = 15°$. $O_2A = O_2C = 5$, $\angle BAO_1 = 15°$, тогда $\angle ACO_2 = 15°$. $\angle ACO_2 = \angle ABO_1$, значит $CO_2 \parallel BO_1$. Проведём $BF \parallel O_1O_2$, $F \in CO_2$.
Тогда в ΔCBF $FB = AO_2 - AO_1 = 5 - 3 = 2$,
$CF = CO_2 - FO_2 = CO_2 - BO_1 = 5 - 3 = 2$,
$\angle CFB = 180° - 2\angle ACO_2 = 180° - 30° = 150°$. По теореме синусов
$BC^2 = CF^2 + BF^2 - 2CF \cdot BF \cdot cos150° = 4 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 + 4\sqrt{3}$, $BC = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. $S_{\Delta CBO_2} = \frac{1}{2} BC \cdot CO_2 \cdot sin15°$,

$sin15° = \sqrt{\frac{1-cos30°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Тогда

$S_{\Delta CBO_2} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Решение. 1 случай. Окружности касаются внутренним образом.



2 способ:

O_1, O_2, A лежат на одной прямой.

$BO_1 = O_1A = 3, AO_2 = CO_2 = 5,$

тогда $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 15°.$

Проведем $O_1M \perp AB, O_2N \perp AC.$

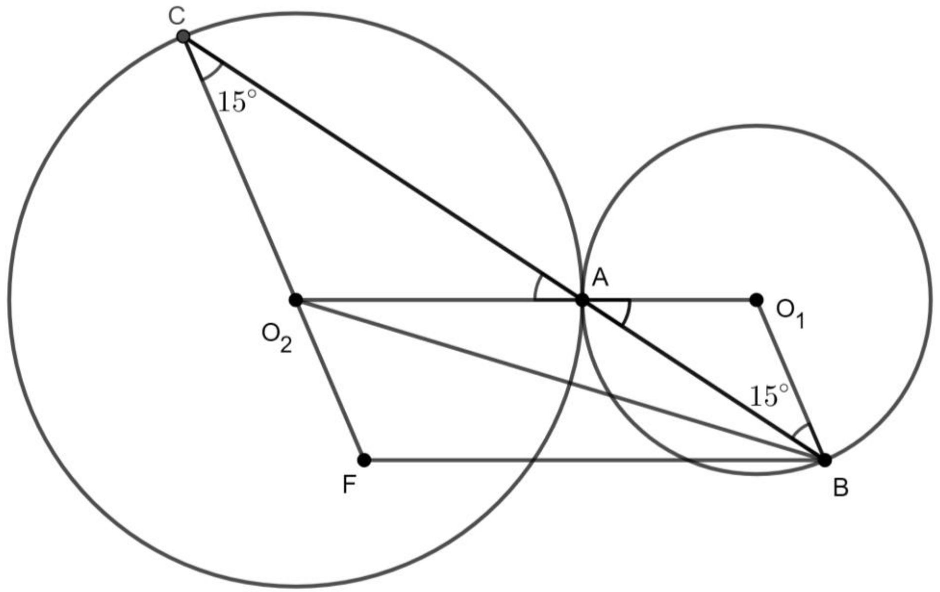
Тогда в ΔAO_1B $AB = 2AM = 2O_1Acos15° = 6cos15°,$

в ΔAO_2C $AC = 2O_2Acos15° = 10cos15°,$

$BC = AC - AB = 10cos15° - 6cos15° = 4cos15°.$

$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2}BC \cdot CO_2 \cdot sin15° = \frac{1}{2} \cdot 4cos15° \cdot 5 \cdot sin15° =$
$10cos15° \cdot sin15° = 5 \cdot (2sin15°cos15°) = 5 \cdot sin30° =$
$= 2,5$

Решение. 2 случай. Окружности касаются внешним образом.



1 способ:

$BF \parallel O_1O_2, F \in CO_2.$

В ΔCFB $FB = O_1O_2 = 8$

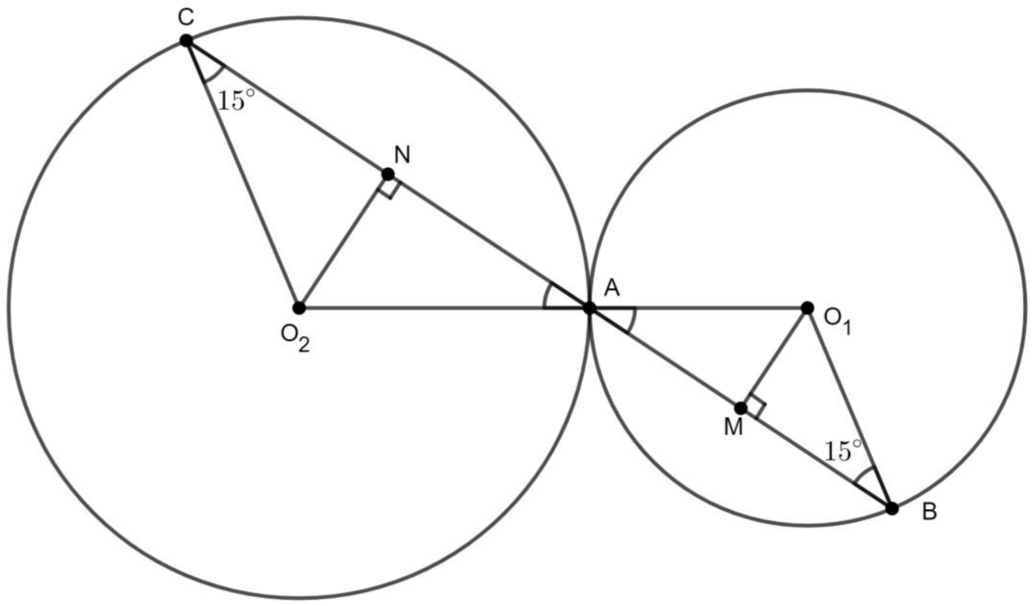
$CF = CO_2 + O_2F = CO_2 + O_1B = 5 + 3 = 8,$

$\angle CFB = 180° - 2\angle FCB = 180° - 30° = 150°$

$$BC = \sqrt{64 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2} CO_2 \cdot BC \cdot sin15° = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 10$$

Решение. 2 случай. Окружности касаются внешним образом.



2 способ:

Проведём $O_2N \perp AC$, $O_1N \perp AB$, тогда $AN = NC$, $AM = MB$ и в ΔAO_2N $AN = 5cos15° = \frac{AC}{2}$, в ΔAO_1M $AM = 3cos15° = \frac{AB}{2}$

$BC = AB + AC = 6cos15° + 10cos15° = 16cos15°$

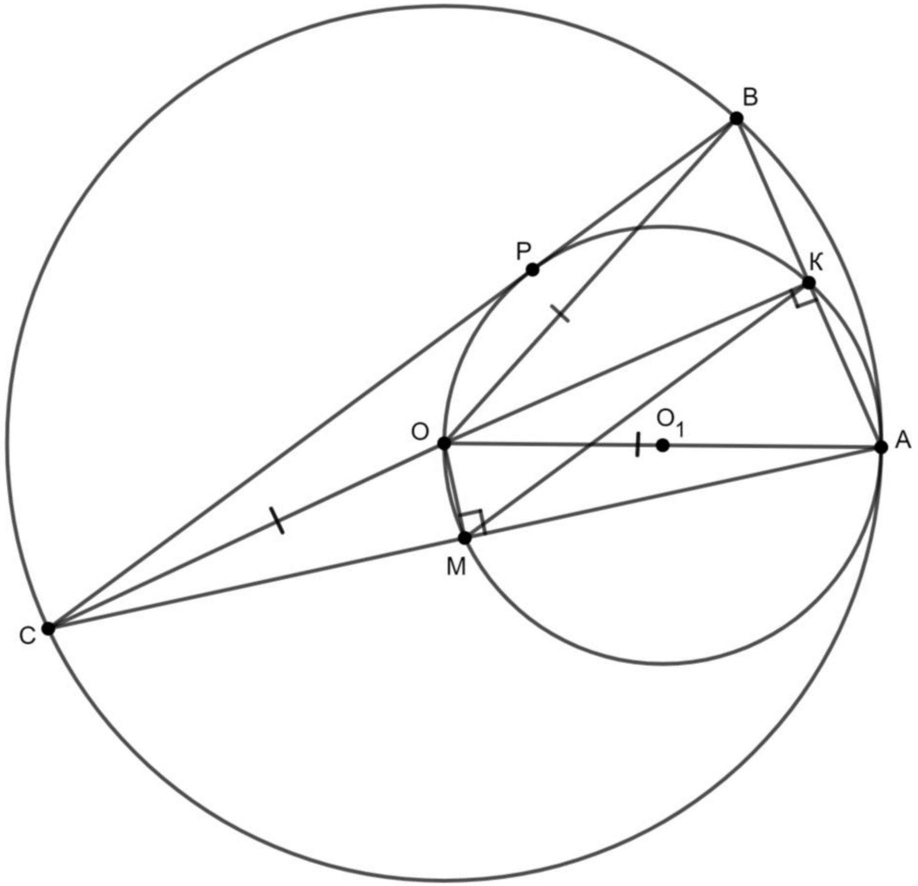
$$S_{\Delta BCO_2} = \frac{1}{2} \cdot CO_2 \cdot BC \cdot sin15°$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 16cos15° sin15° = \frac{5}{2} \cdot 8sin30° = 10$$

Ответ: 2,5 или 10

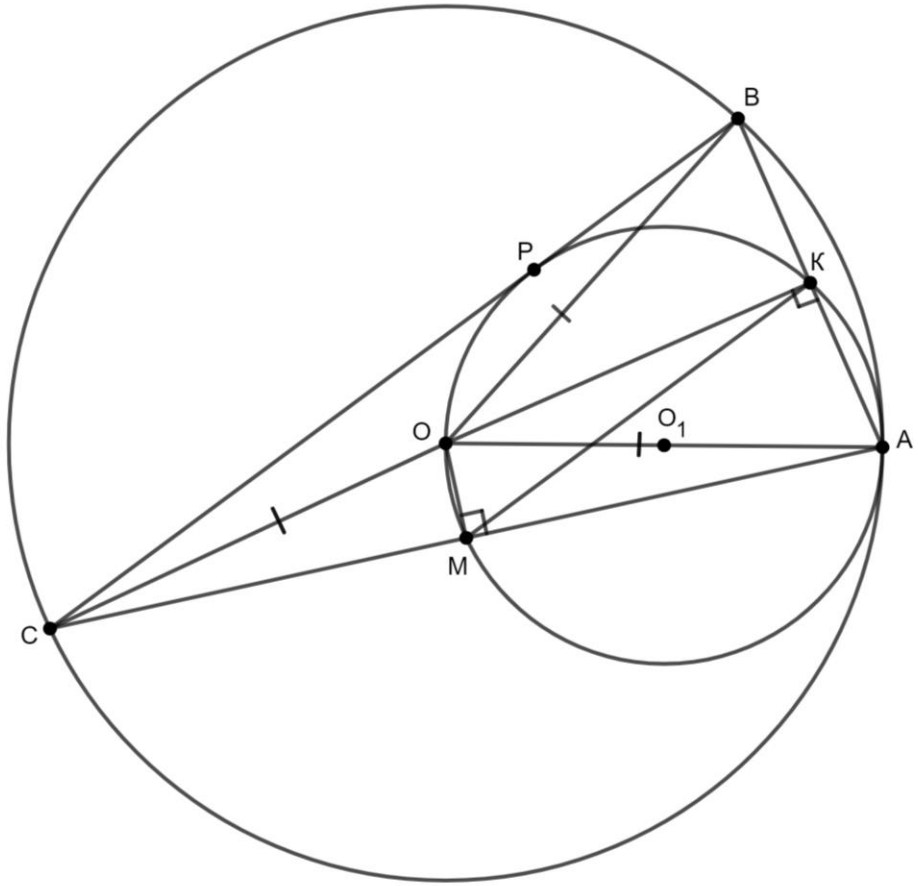
Две окружности касаются внутренним образом в точке А, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда ВС большей окружности касается меньшей в точке Р. Хорды АВ и АС пересекают меньшую окружность в точках К и М соответственно. а) Докажите, что прямые КМ и ВС параллельны, б) Пусть L-точка пересечения отрезков КМ и АР. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а ВС равно 16.

10



- Дано: Окр.(O, R) и Окр.(O_1, r) касаются внутренним образом в точке A , $O \in$ Окр.(O_1, r), BC –хорда Окр.(O, R), BC касается Окр.(O_1, r) в точке $P, K \in AB, K \in$ Окр.(O_1, r), М $\in AC$, $M \in$ Окр.(O_1, r)
- Доказать: $KM \parallel BC$
- Найти AL, если L – точка пересечения KM и $AD, R = 10, BC = 16$

Доказать, что KM ∥ BC.



а) AO – диаметр меньшей окружности, тогда $OK \perp AB$.

Но $OB = OA$ и $OK \perp AB$, значит, K – середина AB.

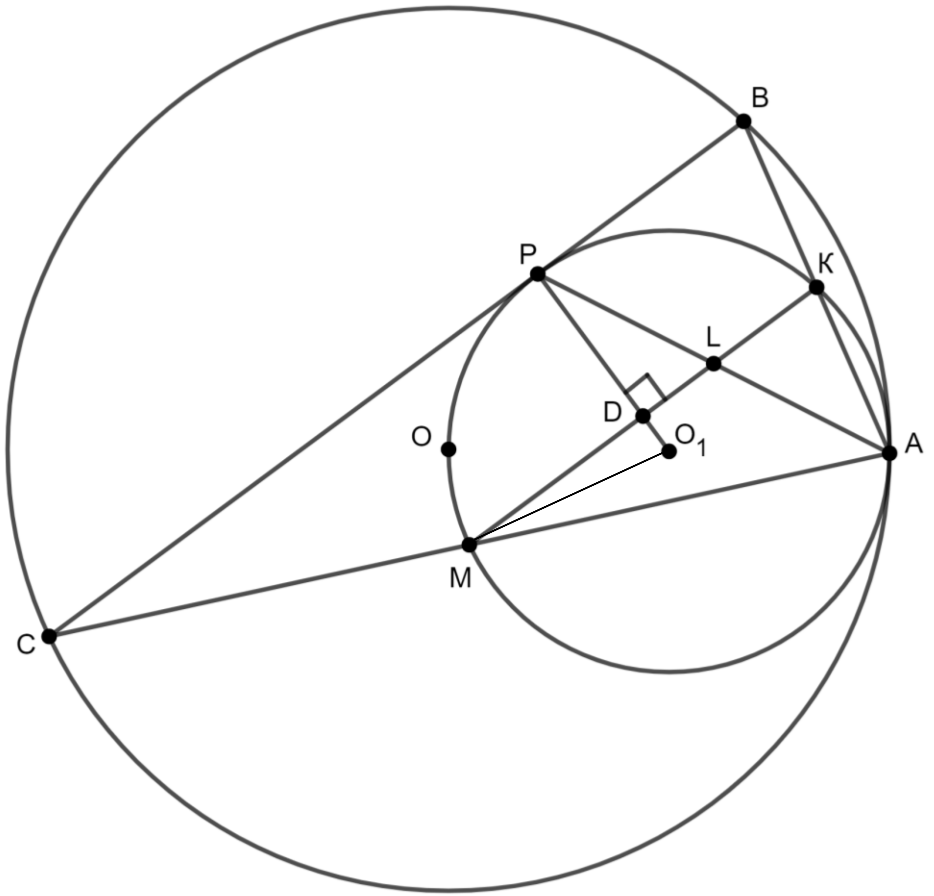
Аналогично, $OM \perp AC$, но $CO = OA$, тогда $CM = MA$.

Итак, MK – средняя линия ΔABC по определению.

Следовательно, $MK \parallel BC$ и $MK = \frac{1}{2}BC$.

$\boldsymbol{Найти\ AL,\ если\ L - точка\ пересечения}$ $\boldsymbol{KM}$ и $\boldsymbol{AD, R = 10, BC = 16}$.

10



1 способ : $R = OA = 10$, $r = O_1A = 5$, $MK = \frac{1}{2}BC = 8$.
$O_1D \perp MK$, $MK \parallel CB$, тогда $O_1D \perp BC$ и $P \in O_1D$,

$MD = DK = 4$. Из ΔMDO_1 $DO_1 = \sqrt{MO_1{}^2 - MD^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, $PD = PO_1 - DO_1 = 5 - 3 = 2$.

Пусть $DL = x$, тогда $KL = 4 - x$, $AL = PL = y$

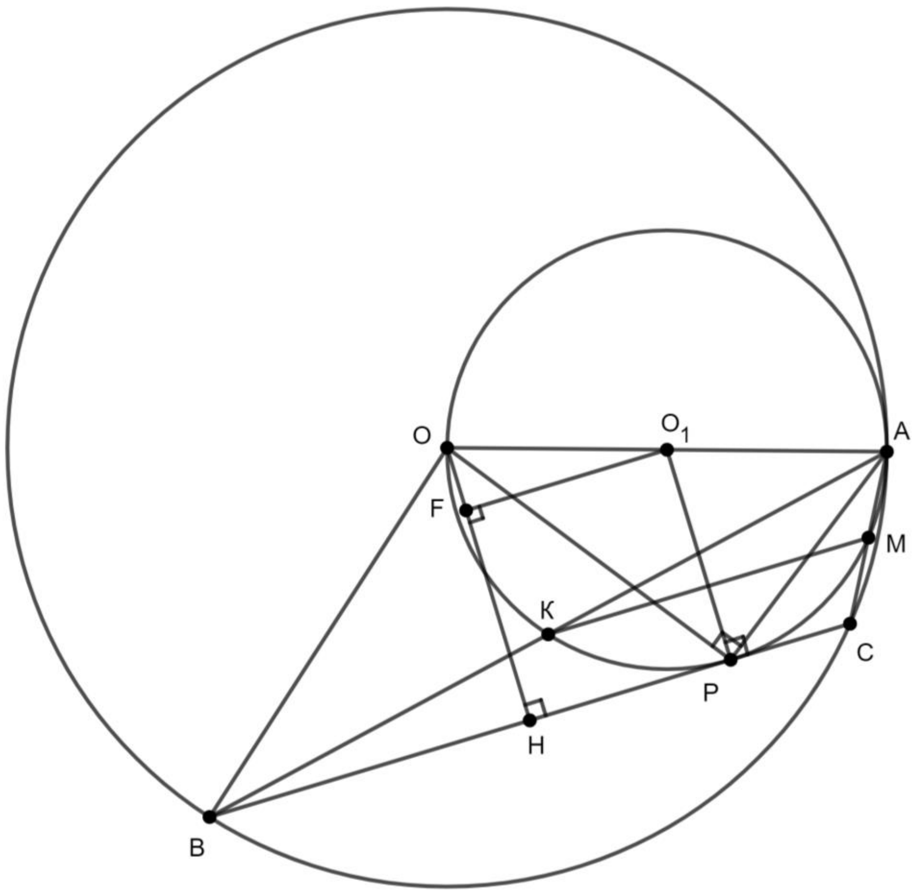
(MK – средняя линия ΔABC).

По свойству пересекающихся хорд $PL \cdot LA = ML \cdot LK$ или $y^2 = (4 + x)(4 - x)$.

Из ΔPDL $PL^2 = PD^2 + DL^2$ или $y^2 = 4 + x^2$.
Следовательно, $(4 + x)(4 - x) = 4 + x^2$, $16 - x^2 = 4 + x^2$,
$x^2 = 6$, тогда $y^2 = AL^2 = 4 + 6 = 10$, $AL = \sqrt{10}$.

Найти AL, если L – точка пересечения KM и AD, $R = 10$, $BC = 16$.

10



<u>2 способ:</u> Проведём $OH \perp BC$, тогда H – середина BC, $BH = HC = 8$.

Из ΔBOH $OH = \sqrt{OB^2 - HB^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$, $O_1P \perp BC$, так как P – точка касания BC с меньшей окружностью. Проведём $O_1F \perp OH$. $OF = OH - FH = OH - O_1P = 6 - 5 = 1$.

$PH^2 = O_1F^2 = O_1O^2 - OF^2 = 25 - 1 = 24$.

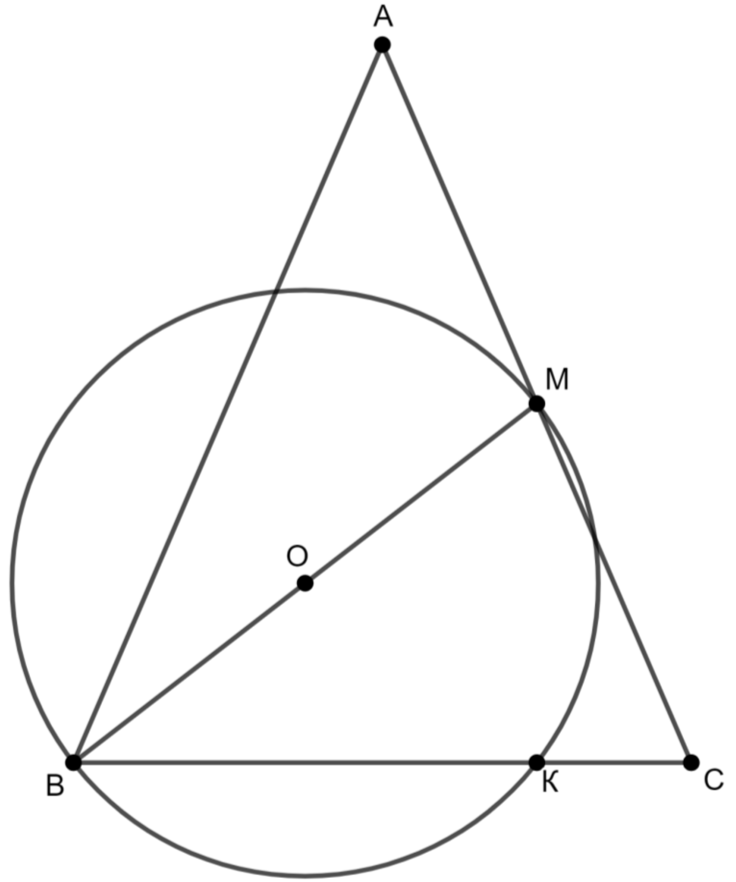
$OP^2 = OH^2 + HP^2 = 36 + 24 = 60$ (из ΔOHP)

ΔOAP прямоугольный, так как OA – диаметр, тогда

$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{100 - 60} = 2\sqrt{10}$. KM – средняя линия ΔABC, поэтому L – середина AP.

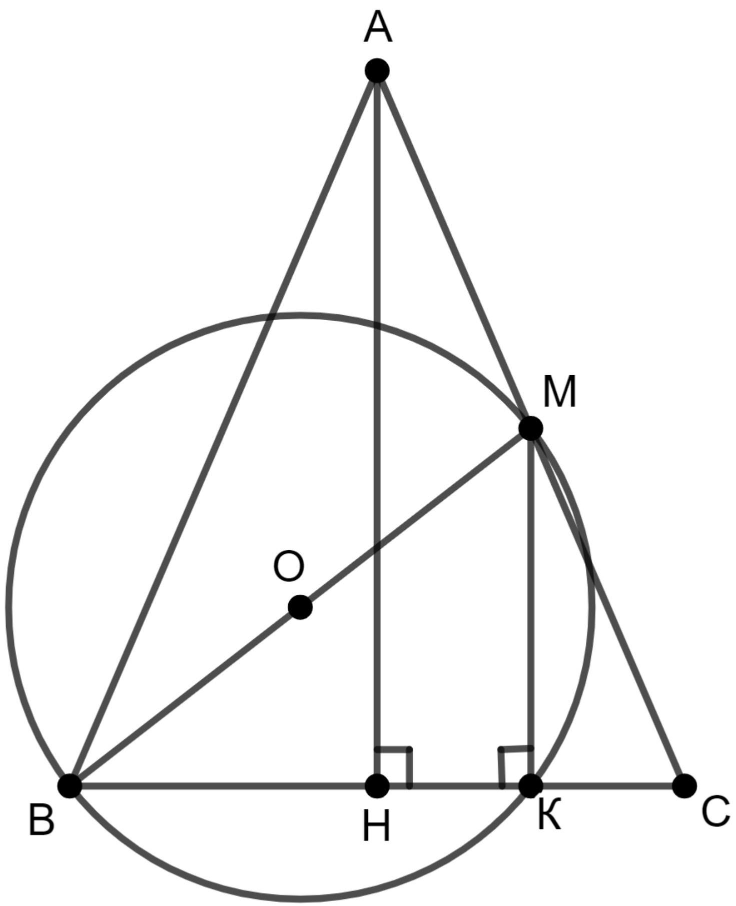
Следовательно, $AL = \frac{1}{2}AP = \sqrt{10}$.

Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K. а) Докажите, что BK втрое больше отрезка CK. б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если BK=18, BN=17.



- Дано: $\Delta ABC, AB = AC, M \in AC, AM = MC,$ $O \in BM, BO = OM,$ Окр. (O, BO) пересекает BC в точке K
- Доказать: $BK = 3KC;$
- Найти AB, если $BK = 18, BN = 17.$

Доказать, что BK = 3KC.



$\angle BKM = 90°$, так как BM – диаметр окружности, K лежит на окружности.

Проведём высоту AH. Тогда $AH \parallel MK$.

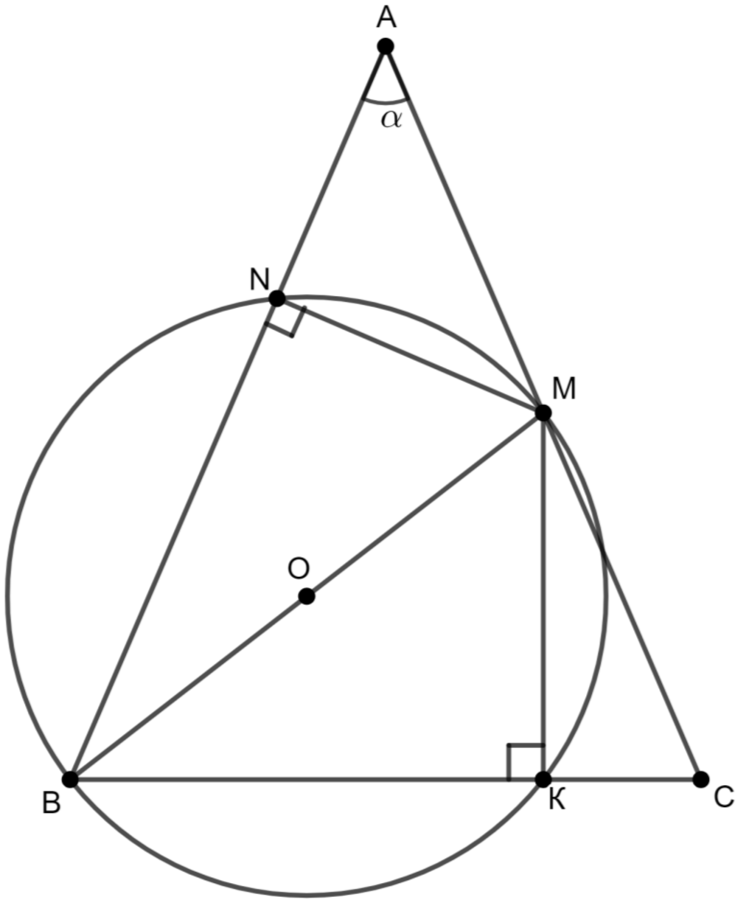
Так как $AM = MC$ и $AH \parallel MK$, то $HK = KC$,

но $BH = HC = \frac{1}{2}BC$.

Тогда $CK = \frac{1}{2}HC = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}BC$,

$BK = 3CK$.

Найти AB, если $BK = 18, BN = 17$.



Пусть $AB = AC = 2x$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда $AM = x$, $AN = 2x - 17$. В ΔAMN $\angle ANM = 90°$

$cos\alpha = \frac{AN}{AM} = \frac{2x-17}{x}$. $BK = 3KC$, $BK = 18$, тогда $KC = 6$, $BC = BK + KC = 18 + 6 = 24$.

По теореме косинусов для ΔABC

$cos\alpha = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{4x^2+4x^2-24^2}{2\cdot 2x\cdot 2x} = \frac{x^2-72}{x^2}$.

Итак, $\frac{x^2-72}{x^2} = \frac{2x-17}{x}$, $x = 8$ или $x = 9$. Найдём AN.

При $x = 8$ $AN = 2x - 17 = -1 < 0$, при $x = 9$ $AN = 2x - 17 = 1$. Следовательно, $AB = 2x = 18$.