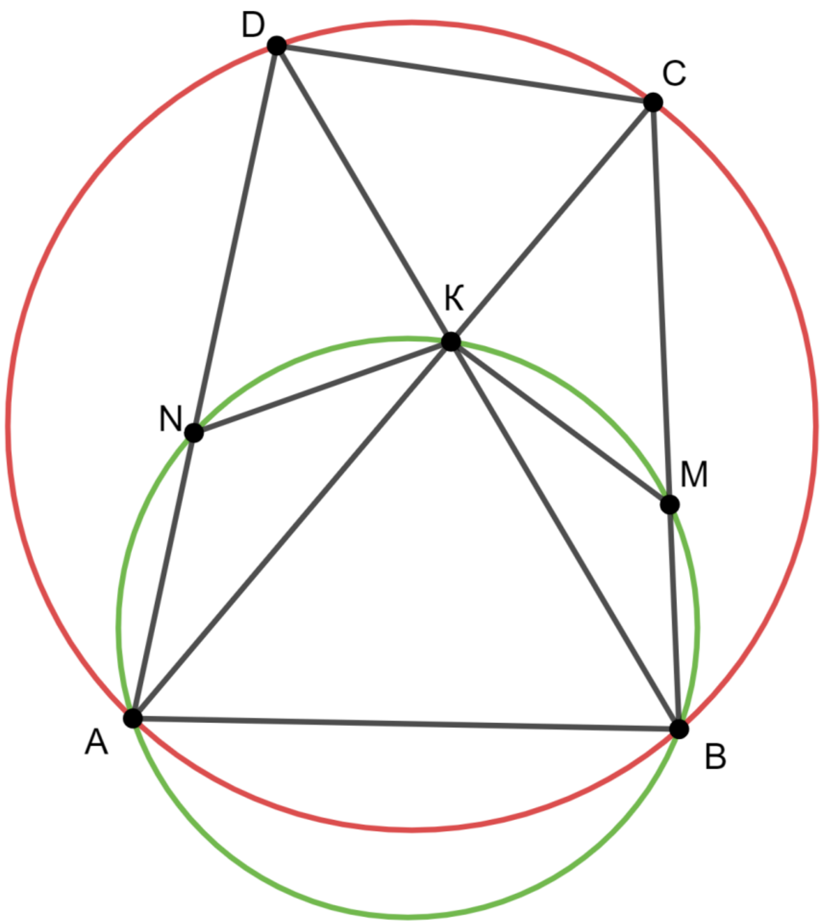
Несложные задачи на окружности с красивым решением

КОНДРУШЕНКО Е.М.
КРЕТ А.Д.

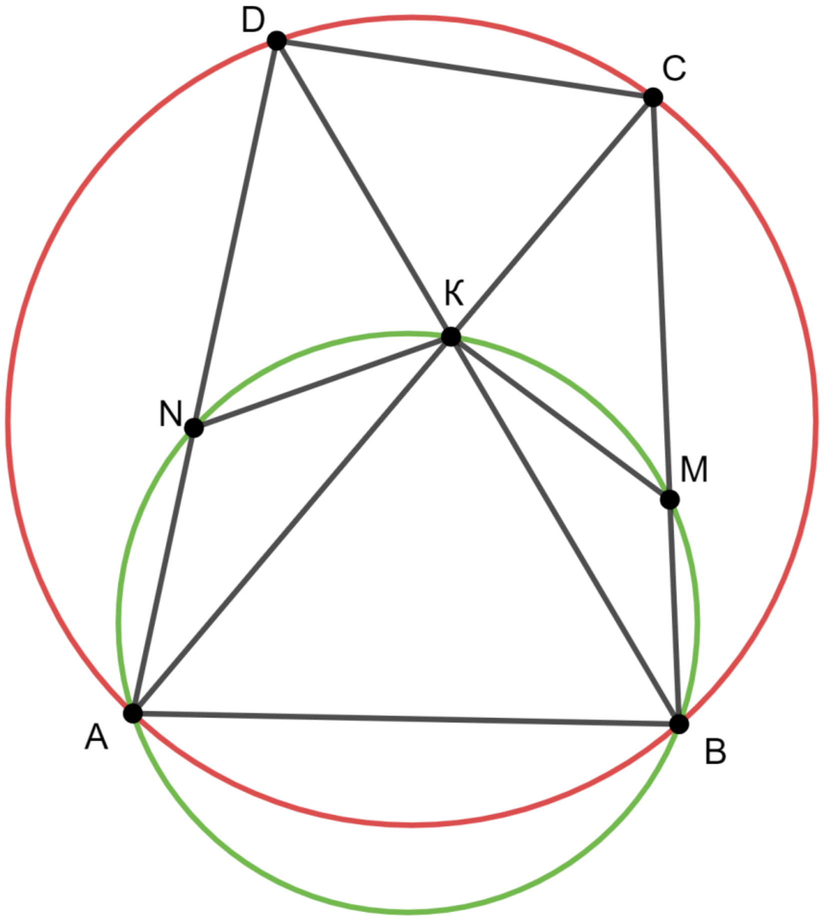
Четырехугольник ABCD вписан в окружность, K-точка пересечения диагоналей ABCD. Через точки K, A, B проходит окружность, пересекающая BC в точке M, AD- в точке N. Докажите, что $KN = KM$.

1



- Дано: ABCD вписан в Окр.(O,r), $K \in AC$, $K \in BD$, через K, A, B проходит Окр.(O_1, r_1), пересекающая BC в точке M, AD в точке N
- Доказать: $KN = KM$

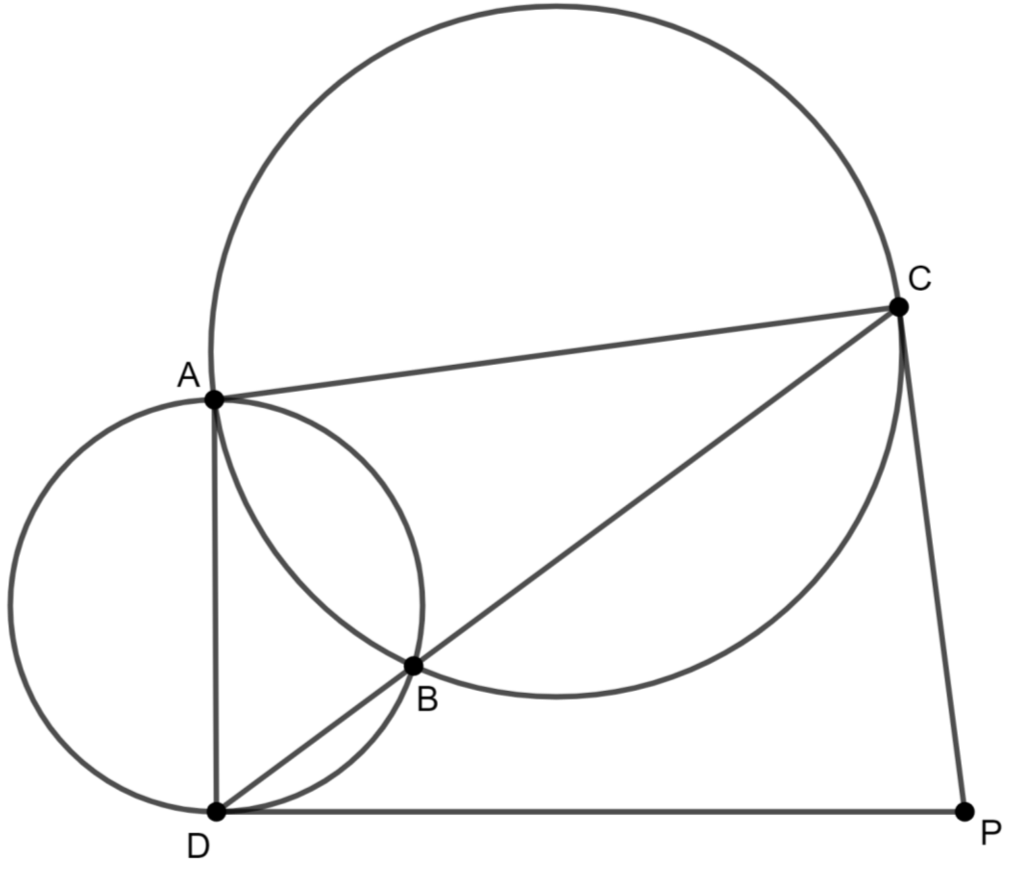
Доказательство:



В Окр.(O,r) $\angle DAC = \angle DBC$ т.к. вписанные, опираются на $\cup DC$, значит $\angle NAK = \angle KBM$, тогда в Окр.(O_1, r_1) $\cup NK = \cup MK$, отсюда $NK = MK$.

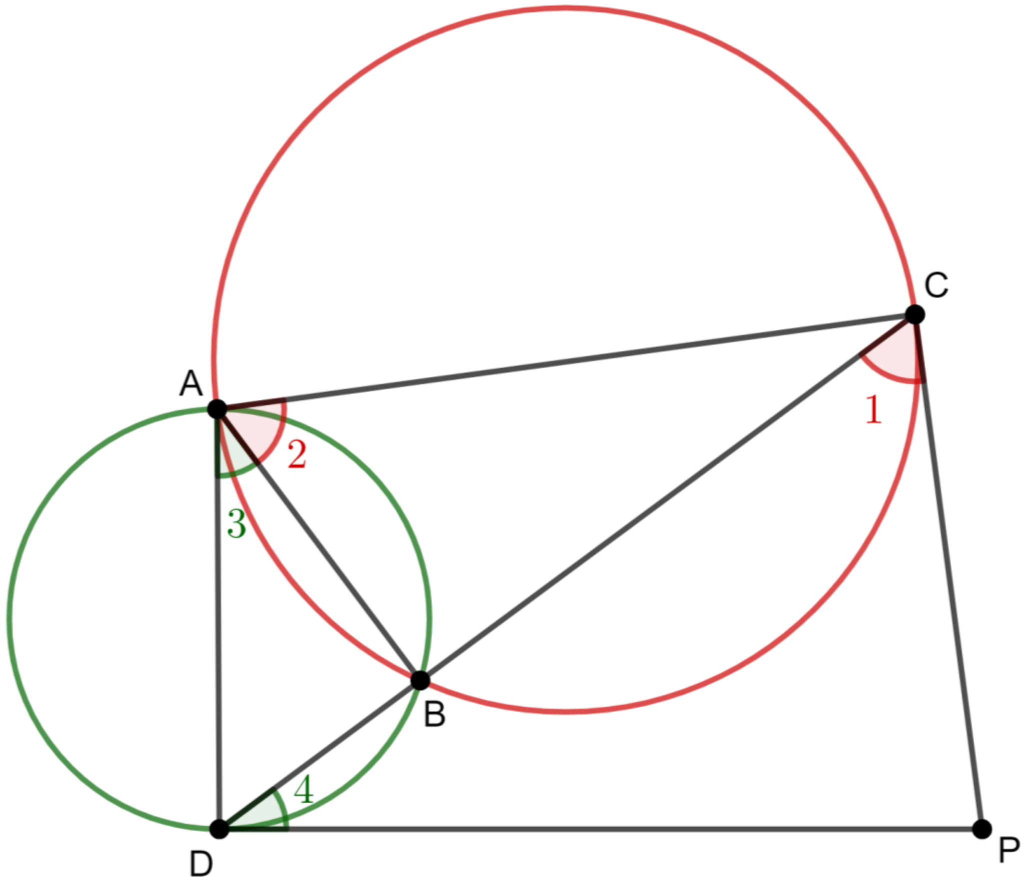
Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем в точках C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A,D,C, P – точка пересечения касательных-лежат на одной окружности.

2



- Дано: Окр.(O,r) пересекает Окр.(O_1, r_1) в точках A и B, BC пересекает Окр.(O,r) в точке D, PC касательная к Окр.(O_1, r_1), C-точка касания, PD- касательная к Окр.(O,r) , D-точка касания
- Доказать: A, D, C, P – лежат на одной окружности

Доказательство:



Проведем AB. В Окр.(O_1, r_1) $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \cup BC$,

В Окр.(O, r) $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \cup DB$,

В ΔDCP $\angle 1 + \angle 4 = 180° - \angle DPC$

Тогда

$\angle 2 + \angle 3 = 180° - \angle DPC$ или

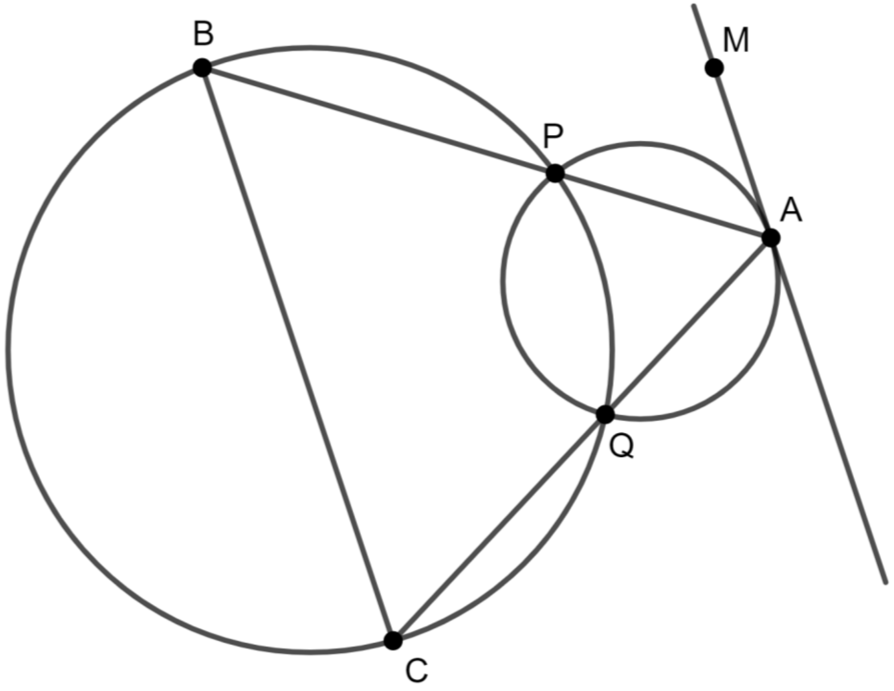
$\angle DAC = 180° - \angle DPC$

$\angle DAC + \angle DPC = 180°$

Значит, около *ACPD* можно описать окружность или *A,C,D,P* лежат на одной окружности.

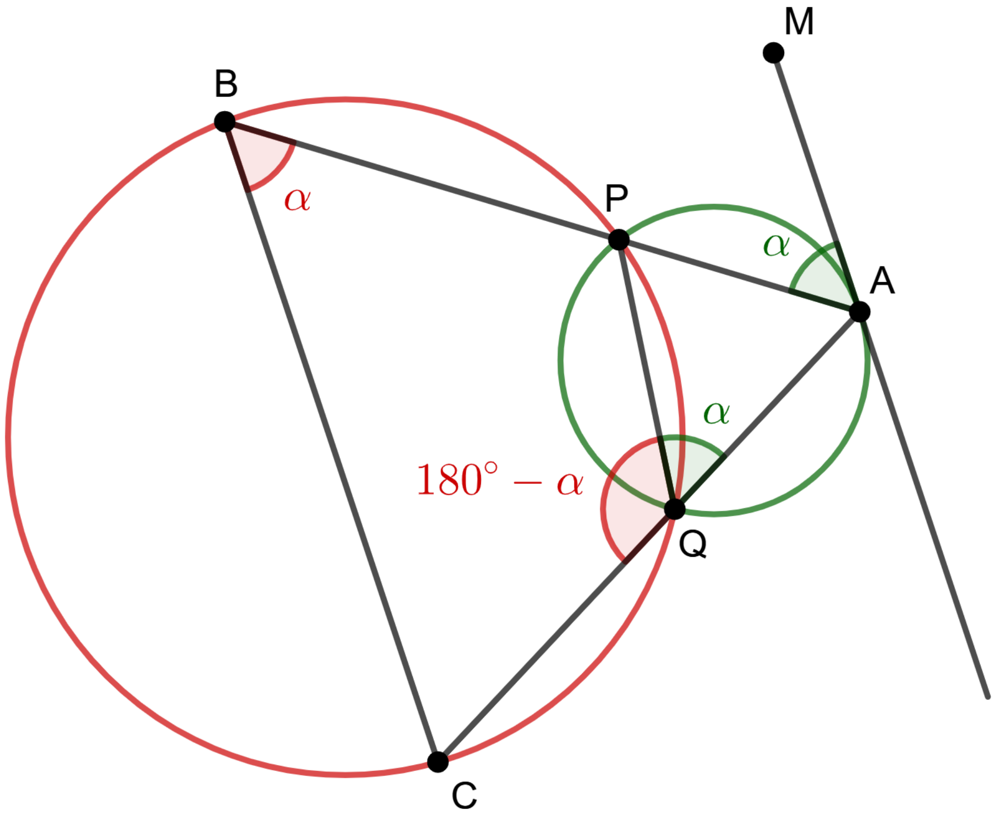
Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна BC.

3



- Дано: Окр.(O, r) пересекает Окр.(O_1, r_1) в точках P и Q, $A \in$ Окр.(O_1, r_1), AP пересекает Окр.(O, r) в точке B, AQ пересекает Окр.(O, r) в точке C, AM-касательная к Окр.(O_1, r_1), A-точка касания
- Доказать: $AM \parallel BC$

Доказательство:



Проведем хорду PQ. Обозначим $\angle MAP = \alpha$.

В Окр.(O_1, r_1) $\angle MAP = \angle AQP = \frac{1}{2} \cup AP = \alpha$.

$PBCQ$ вписан в Окр.(O, r),

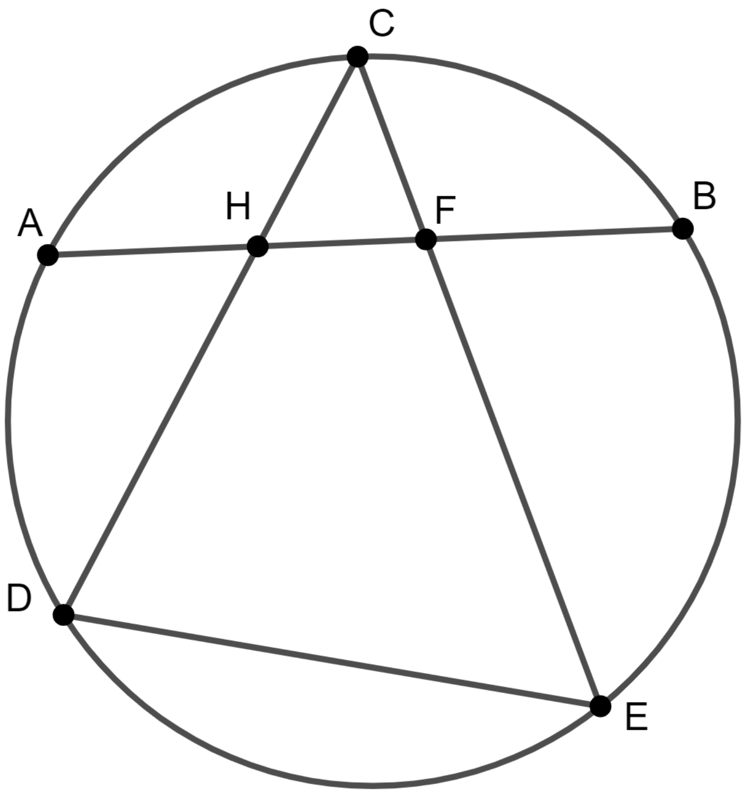
тогда $\angle PQC + \angle AQP = 180°$,

$\angle PQC = 180° - \alpha$,

$\angle PBC = 180° - \angle PQC = 180° - (180° -$

4

Через середину C дуги AB проведены две прямые CD и CE, пересекающие хорду AB в точках H и F. Докажите, что около четырёхугольника DHFE можно описать окружность.



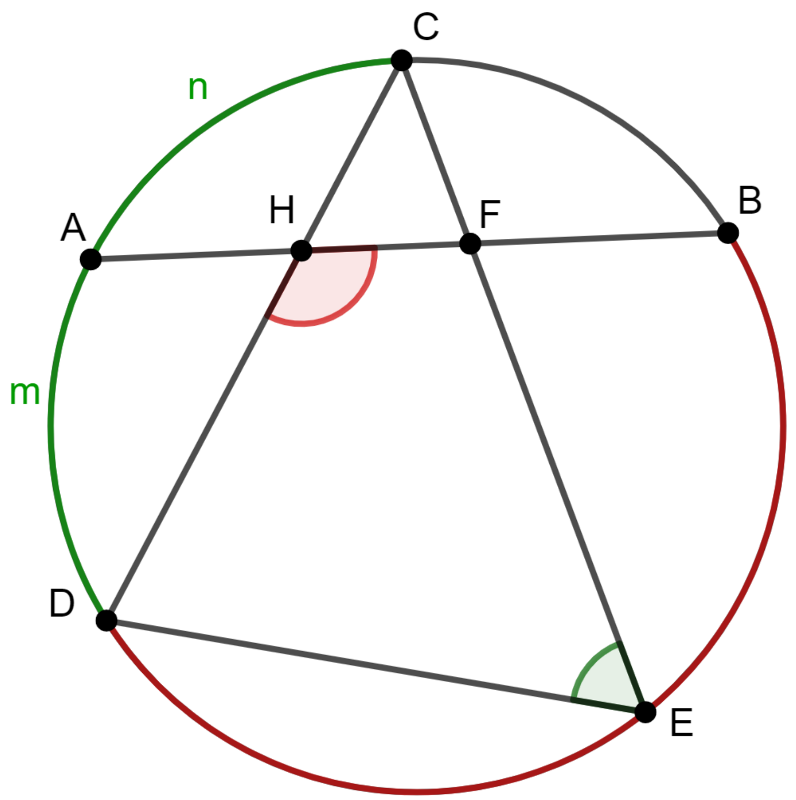
- Дано:Окр.(O,r), $\cup AC = \cup CB$,

H – точка пересечения хорд CD и AB,

F – точка пересечения хорд CE и AB

- Доказать: около четырёхугольника $DHFE$ можно описать окружность

Доказательство:



$\angle DHF = \frac{1}{2}(\cup BED + \cup AnC) = \frac{1}{2}(\cup BED + \frac{1}{2} \cup ACB)$

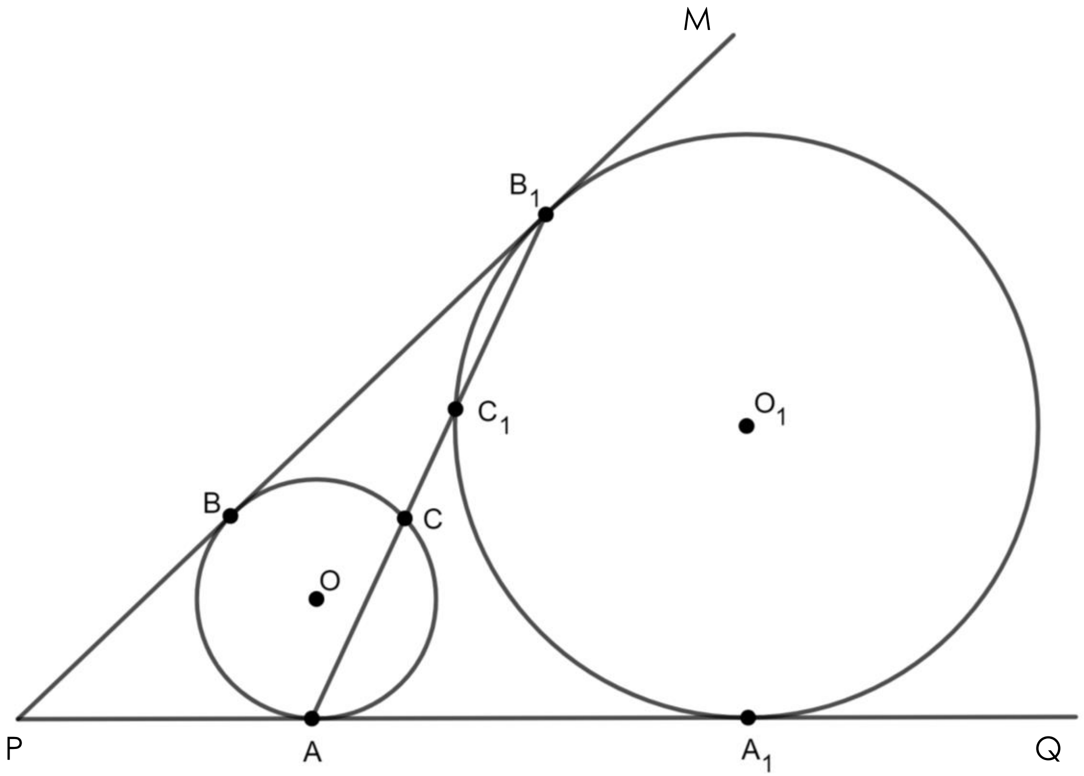
$\angle DEF = \frac{1}{2} \cup DAC = \frac{1}{2}(\cup DmA + \frac{1}{2} \cup ACB)$,

Тогда

$\angle DHF + \angle DEF = \frac{1}{2}\left(\cup BED + \frac{1}{2} \cup ACB + \cup DmA + \frac{1}{2} \cup ACB\right) =$
$= \frac{1}{2}(\cup BED + \cup DmA + \cup ACB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$, значит, около четырехугольника $DHFE$ можно описать окружность.

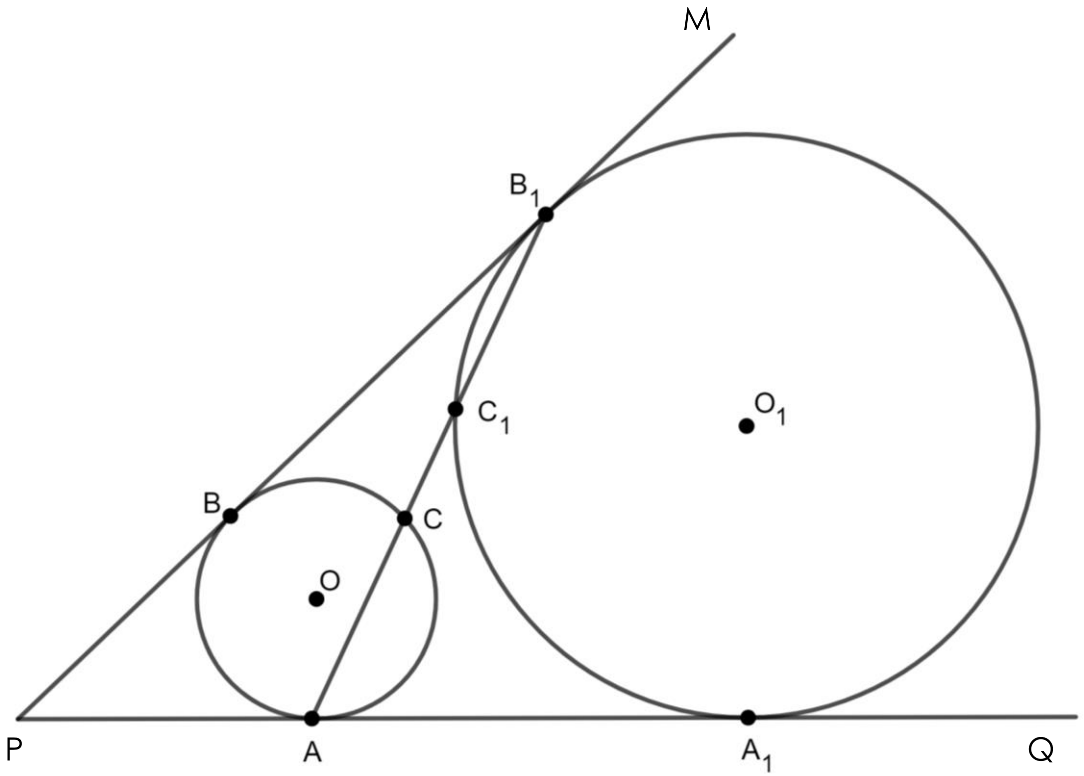
5

В угол вписаны две окружности. A и B – точки касания первой окружности со сторонами угла, A_1 и B_1 - это точки касания второй окружности со сторонами угла. Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Докажите, что $AC = B_1C_1$.



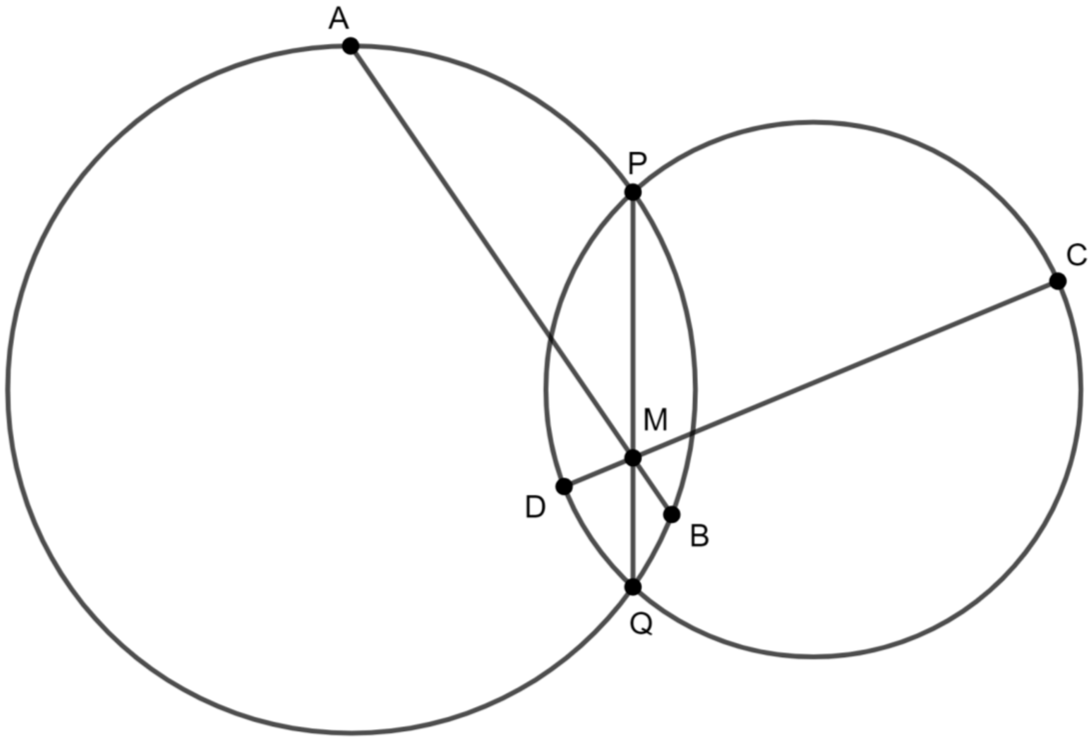
- Дано: $\angle MPQ$, Окр.(O, r) касается стороны PM в точке B и стороны PQ в точке A, Окр.(O_1, r_1) касается стороны PM в точке B_1 и стороны PQ в точке A_1, $C \in AB_1$, $C \in$ Окр.(O, r), $C_1 \in AB_1$, $C_1 \in$ Окр.(O_1, r_1).
- Доказать: $AC = B_1C_1$

Доказательство:



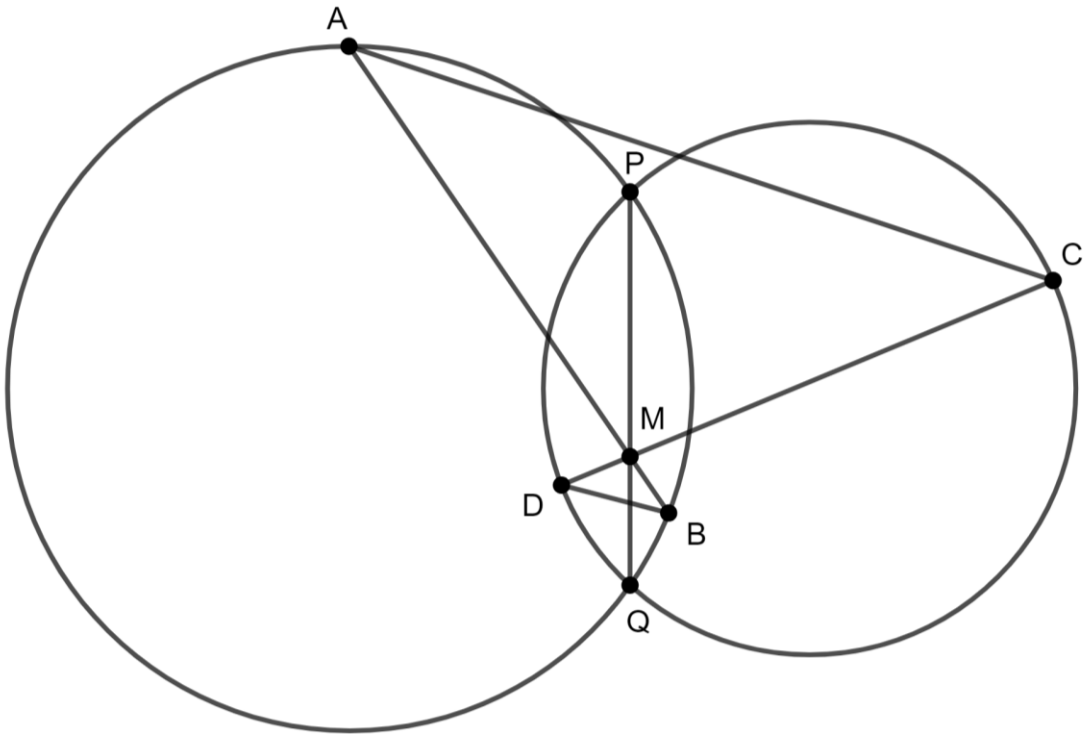
$PB_1 = PA_1, PB = PA,$
тогда $PB_1 - PB = PA_1 - PA,$
$BB_1 = AA_1$, но
$BB_1{}^2 = B_1A \cdot B_1C = (B_1C_1 + C_1C + CA)(B_1C_1 + C_1C),$
$AA_1{}^2 = AB_1 \cdot AC_1 = (AC + C_1C + C_1B_1)(AC + CC_1),$
значит,
$B_1C_1 + C_1C = AC + CC_1, B_1C_1 = AC.$

На общей хорде двух пересекающихся окружностей взята точка M и через неё проведены хорды AB и CD. Докажите, что угол MDB равен углу MAC.



- Дано: Окр.(O, r) пересекает Окр.(O_1, r_1) в точках P и Q, $M \in PQ$, AB – хорда Окр.(O, r), $M \in AB$, CD – хорда Окр.(O_1, r_1), $M \in CD$
- Доказать: $\angle MDB = \angle MAC$

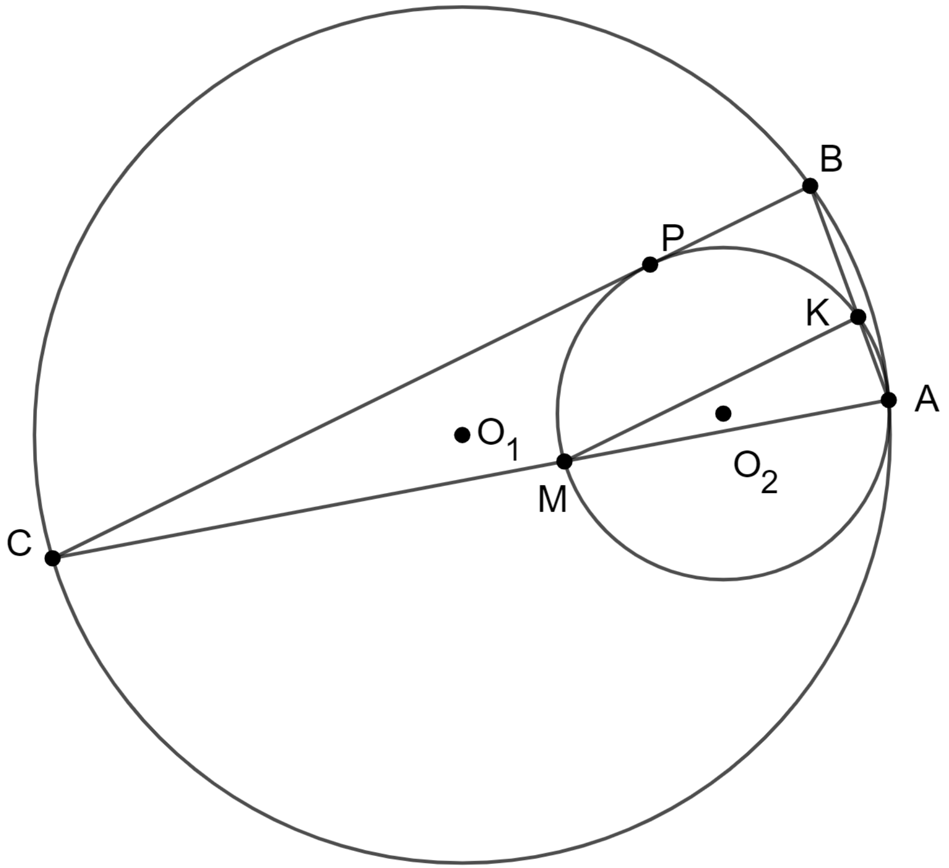
Доказательство:



В Окр.(O, r) $AM \cdot MB = PM \cdot MQ$;
В Окр.(O_1, r_1) $DM \cdot MC = PM \cdot MQ$.
Тогда $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ или $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$;
$\Delta AMC \backsim \Delta DMB$, так как
$\angle AMC = \angle DMB$ и $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$.
Значит, $\angle MAC = \angle MDB$.

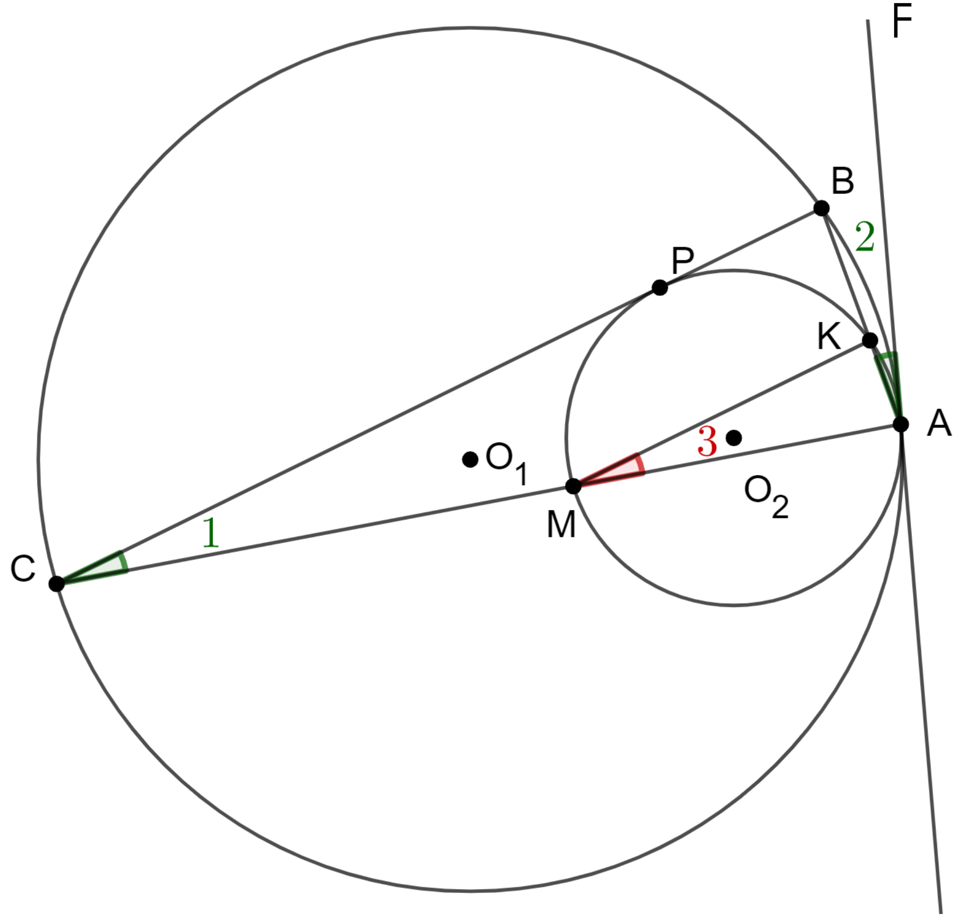
Окружности касаются внутренним образом. А-точка касания окружностей, Р-точка касания хорды ВС и меньшей окружности, ВА и СА – хорды большой окружности, пересекающие меньшую в точках К и М соответственно. Докажите, что AF ∥ KM.

7



- Дано: Окр.(O_1, R_1) и Окр.(O_2, R_2) касаются внутренним образом, A –точка касания, P – точка касания хорды BC и Окр.(O_2, r_2), BA и CA – хорды Окр.(O_1, R_1), пересекающие Окр.(O_2, R_2) в точках K и M соответственно.
- Доказать: ВС ∥ MK

Доказательство:



Пусть AF − общая касательная к окружностям.

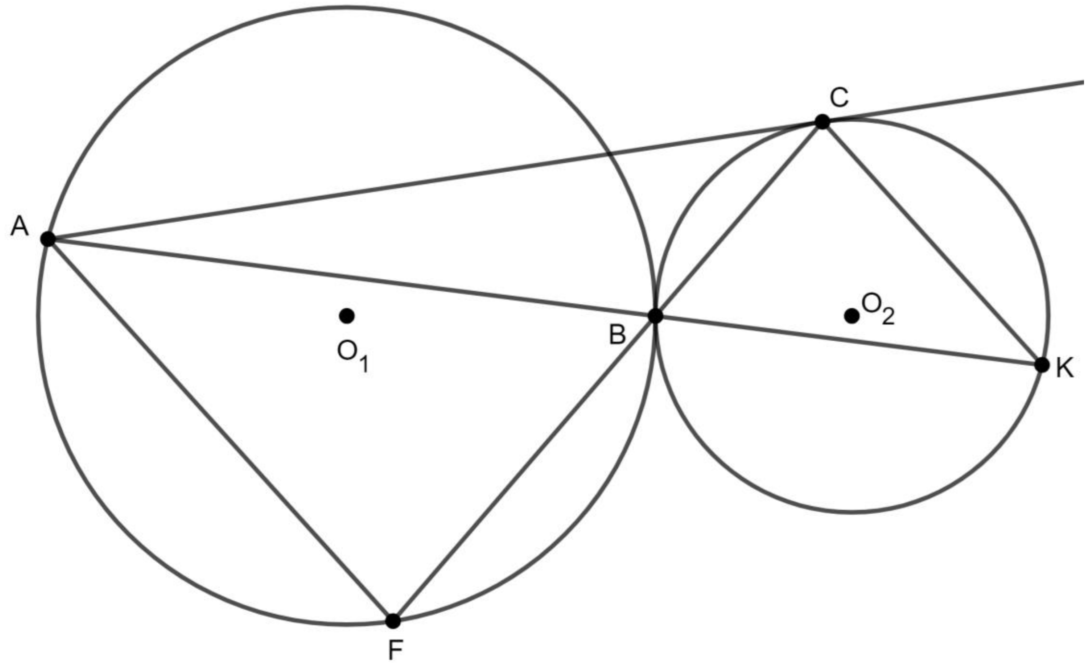
В Окр.(O_1, R_1) $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \cup BA$.

В Окр.(O_2, R_2) $\angle 3 = \angle 2 = \frac{1}{2} \cup AK$.

Значит, $\angle 1 = \angle 3$. Но $\angle 1$ и $\angle 3$ соответственные при пересечении прямых BC и MK секущей AC, значит, $BC \parallel MK$.

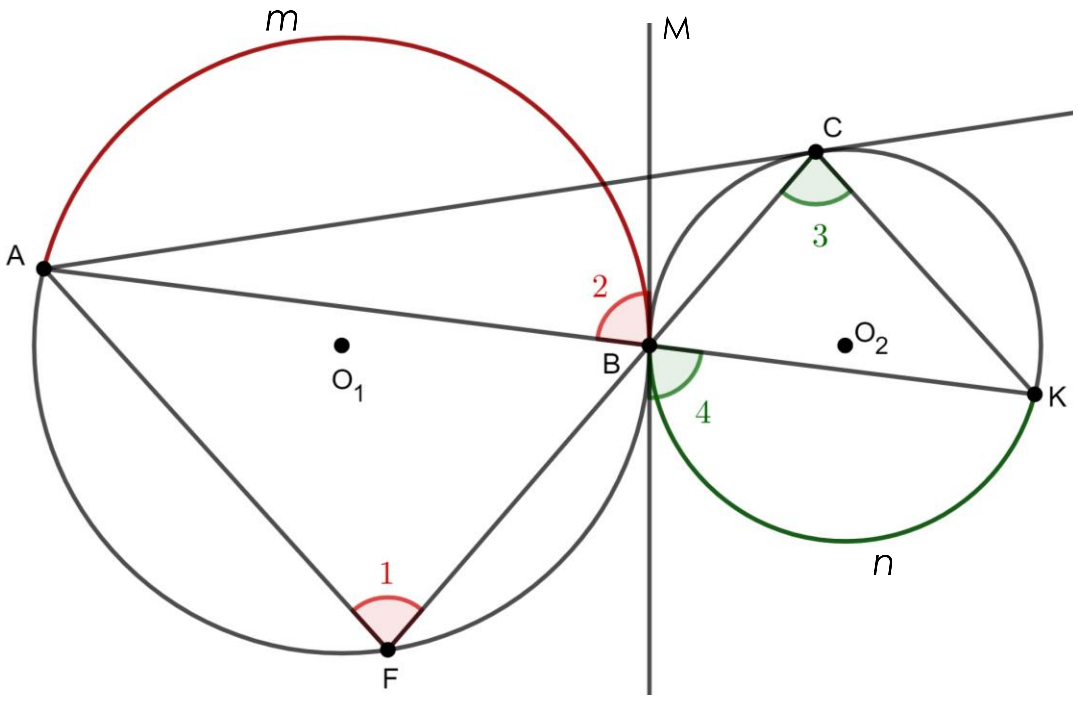
8

Две окружности касаются в точке В (рис. 12). С – точка касания АС и окружности (O_2; r_2), А лежит на окружности (O_1; r_1). Прямая СВ пересекает окружность (O_1; r_1) в точке F, прямая АВ пересекает окружность (O_2; r_2) в точке К. Докажите, что AF II КС.



- Дано: Окр.(O_1, R_1) и Окр.(O_2, R_2) касаются в точке B внешним образом, $A \in$ Окр.(O_1, R_1), AB пересекает Окр.(O_2, R_2) в точке K, AC – касательная к Окр.(O_2, R_2), C – точка касания, CB пересекает Окр.(O_1, R_1) в точке F
- Доказать: $AF \parallel KM$

Доказательство:



Проведем общую касательную BM к окружностям.

В Окр.(O_1, R_1) $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \cup AmB$.

В Окр.(O_2, R_2) $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \cup BnK$,

но $\angle 2 = \angle 4$ – вертикальные, значит,

$\angle 1 = \angle 3$.

Но $\angle 1$ и $\angle 3$ накрест лежащие при пересечении прямых AF и CK секущей CF, значит, $AF \parallel CK$.