Ох, уж эти окружности!

КОНДРУШЕНКО Е.М.
КРЕТ А.Д.

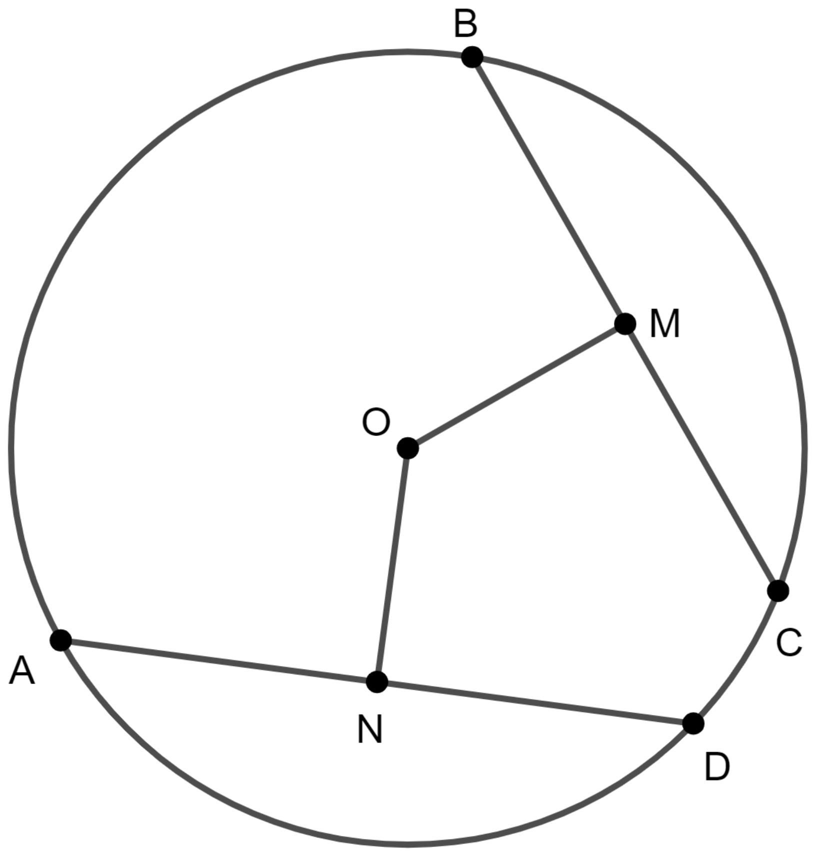
Содержание

Ключевые задачи

Ключевые задачи на окружность и на взаимное расположение прямой и окружности

Доказать, что хорды окружности равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра окружности.

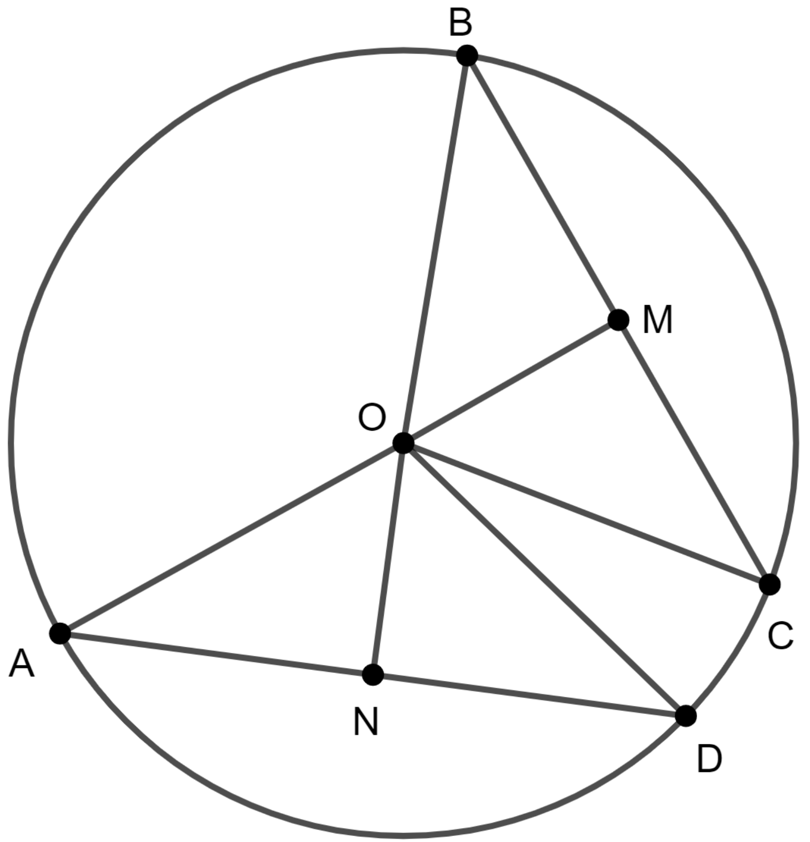
1



- Необходимость
- Дано: Окр.(O, r), AD и BC – хорды окружности,
  $OM \perp BC$, $ON \perp AD$; $AD = BC$
- Доказать: $OM = ON$
- Достаточность
- Дано : Окр.(O, r), AD и BC – хорды окружности,
  $OM \perp BC$, $ON \perp AD$, $OM = ON$
- Доказать: $AD = BC$

Доказательство:

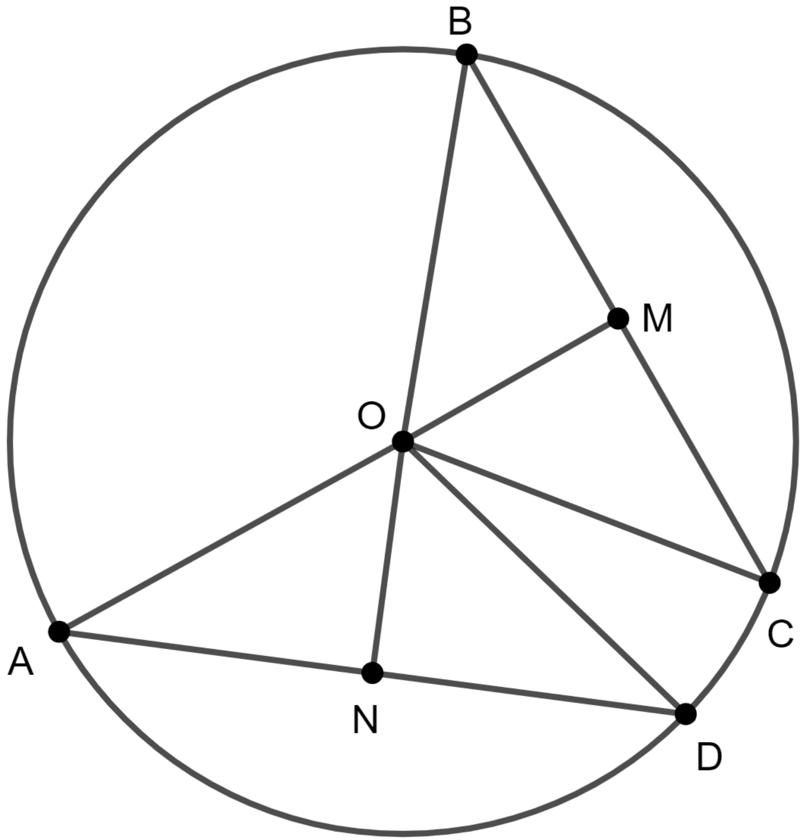
1



Необходимость.

В ΔAOD и ΔBOC $AO = OD = OC = OB = r$, $AD = BC$, значит $\Delta AOD = \Delta BOC$. Тогда все соответствующие элементы этих треугольников равны, ON и OM – соответствующие высоты, значит, $ON = OM$.

Доказательство:

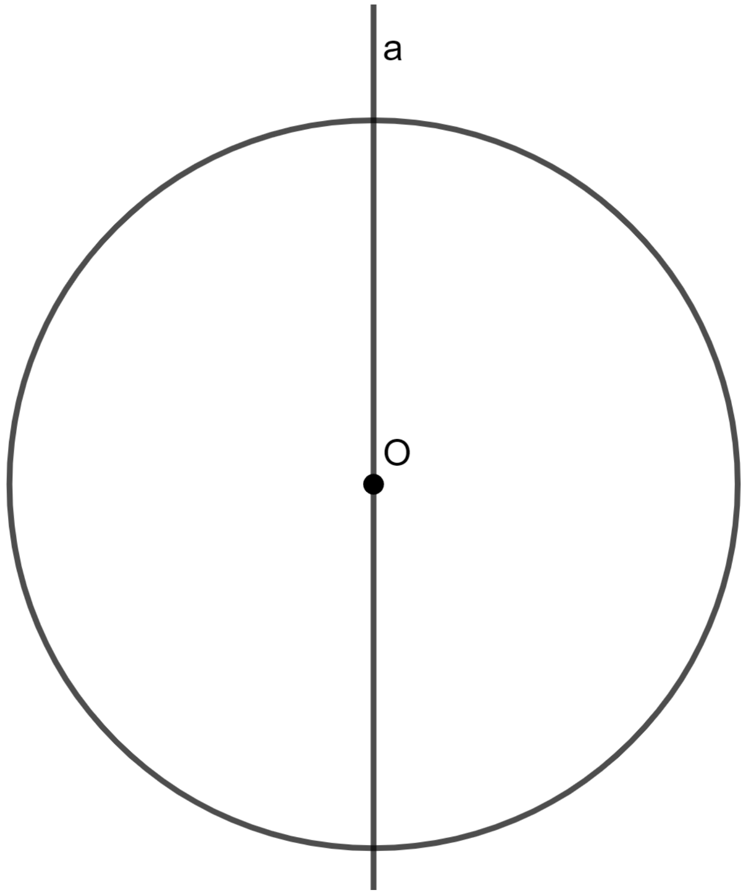


Достаточность.

1. В ΔBOC $OB = OC = r$, $OM \perp BC$, значит $BM = MC$. В ΔAOD $AO = OD = r$, $ON \perp BC$, значит $AN = ND$.
2. В ΔMOC и ΔOND $\angle OMC = \angle OND = 90°$, $OM = ON$ по условию, $OC = OD = r$, значит $\Delta MOC = \Delta OND$ и $MC = ND$.
3. $BM = MC, AN = ND$ и $MC = ND$, по доказанному, значит $BC = AD$.

Доказать, что любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

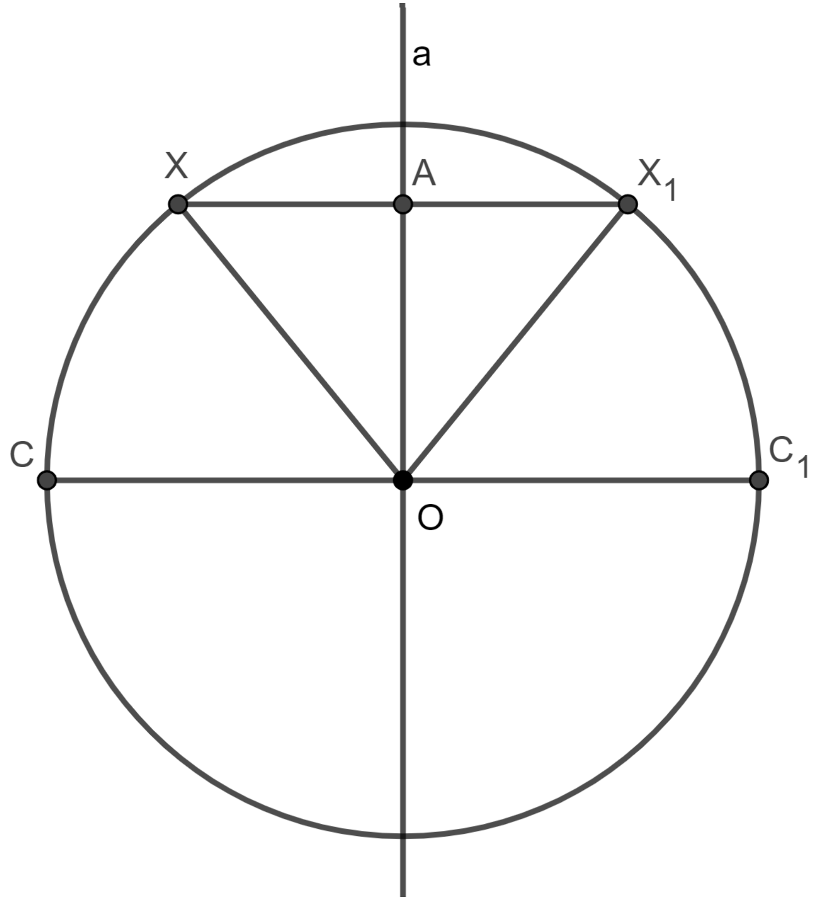
2



- Дано: Окр.(O, r), $O \in a$
- Доказать: a — ось симметрии окружности (O, r)

Доказательство:

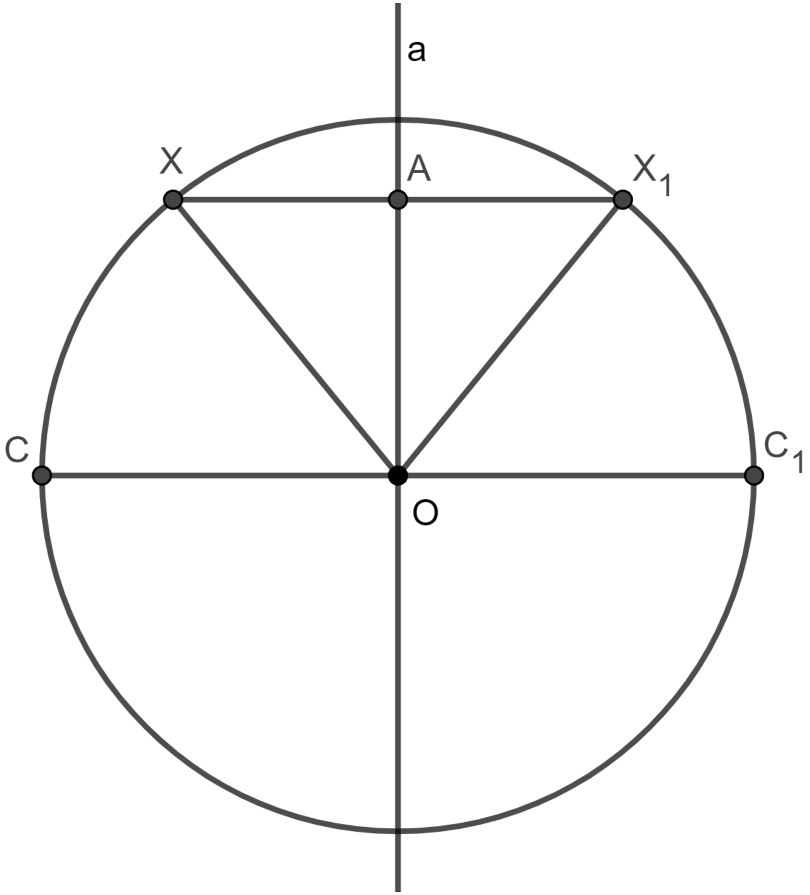
2



1. Пусть CC_1 – диаметр окружности (O, r) и $CC_1 \perp a$. Тогда преобразование симметрии относительно прямой a переводит точку C окружности в точку C_1, и точку C_1 в точку C, а точку O оставляет на месте.
2. Возьмем произвольную точку X, не совпадающую с C и C_1, и построим точку X_1, симметричную точке X относительно прямой a, тогда $XX_1 \perp a$ и $XA = X_1A$, где $A \in a,\ A \in XX_1$.

Доказательство:

2

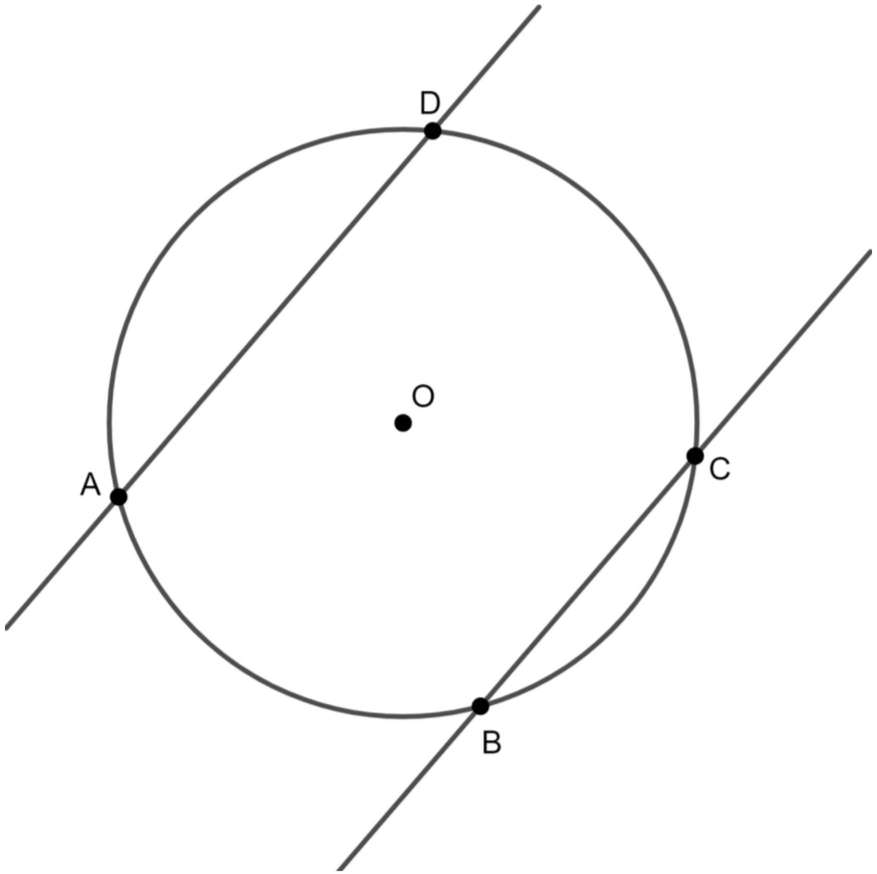


$\Delta OAX = \Delta OAX_1$ так как $\angle OAX = \angle OAX_1 = 90°$, OA – общий катет, $XA = X_1A$. Значит $OX_1 = OX$.

Если $X \in$ Окр. (O, r), то $OX_1 = OX = r$ и если $X \notin$ Окр. (O, r), то $OX \neq r$, тогда и $OX_1 \neq r$.

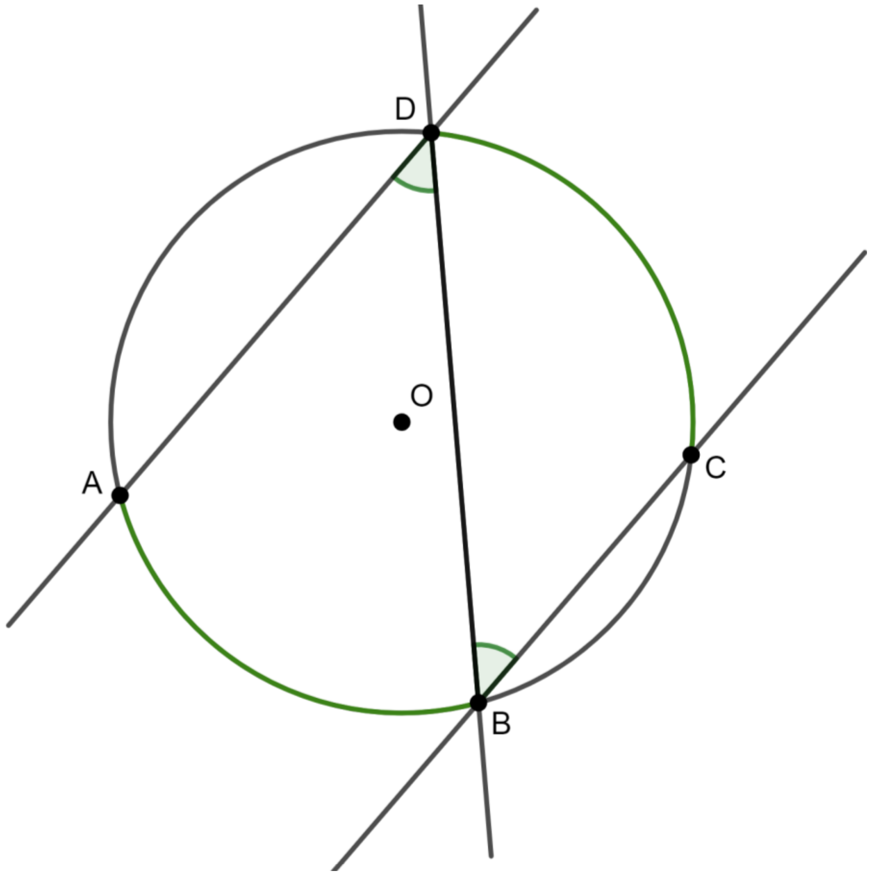
3

Доказать, что если две параллельные прямые пересекают окружность каждая в двух точках, то дуги окружности, заключенные между этими прямыми равны.



- Дано: Окр. (O, r), A, B, C, D – принадлежат окружности (O, r), $AD \parallel BC$
- Доказать: $\cup AB = \cup DC$

Доказательство:



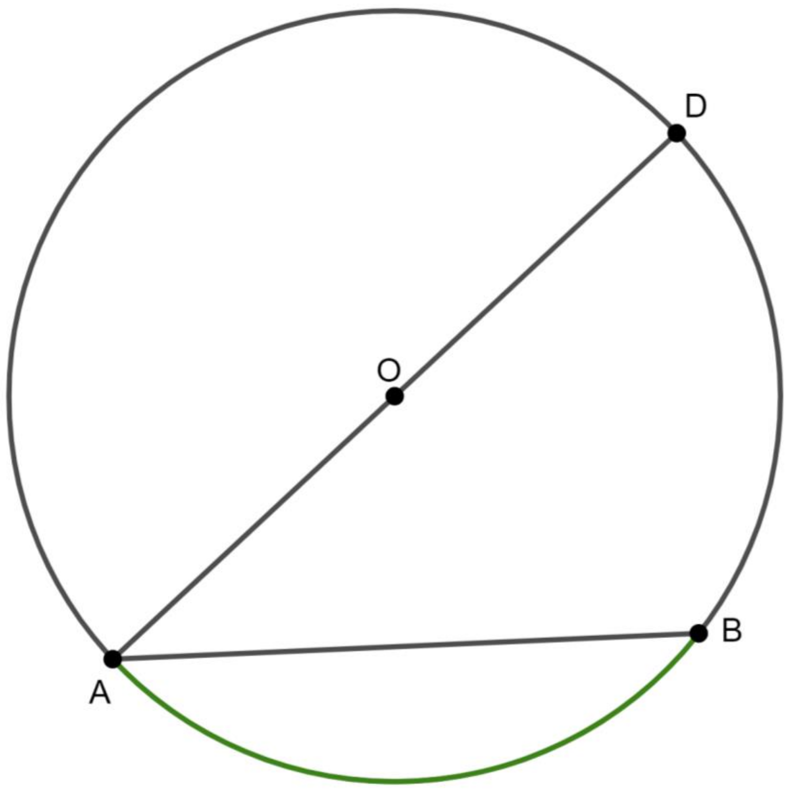
$\angle ADB = \angle CBD$ являются накрест лежащими при параллельных прямых $AD \parallel BC$ и секущей DB, а значит $\angle ADB = \angle CBD$,

$\angle ADB = \frac{1}{2} \cup AB, \angle CBD = \frac{1}{2} \cup CD$, т.к. $\angle ADB$ и $\angle CBD$ вписанные, и $\angle ADB = \angle CBD$.

Значит, $\cup AB = \cup CD$.

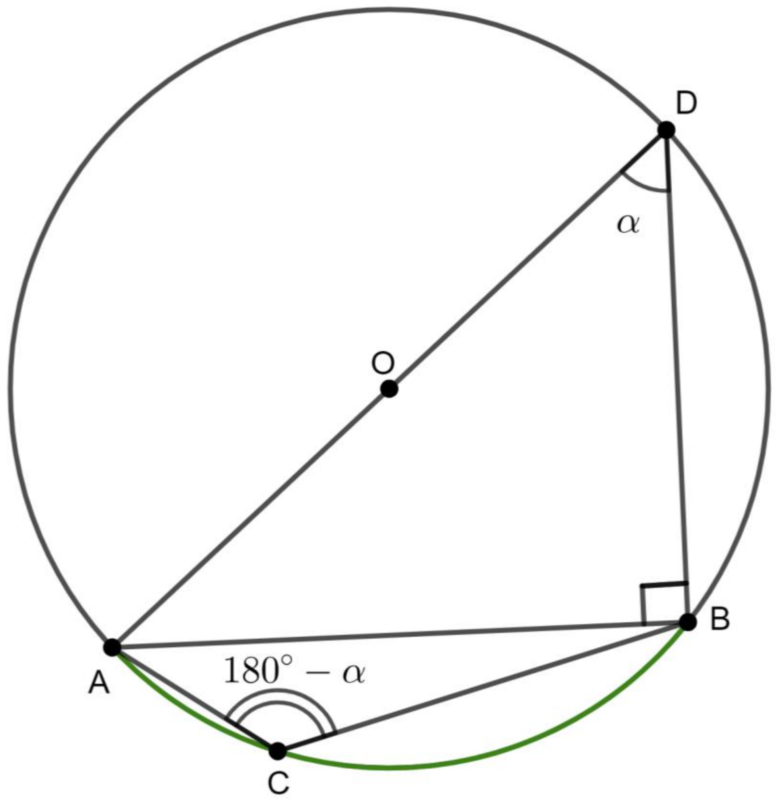
4

Доказать, что хорда окружности равна произведению диаметра на синус вписанного угла, опирающегося на дугу, стягиваемую этой хордой.



- Дано: Окр. (O, r), AB – хорда, α – величина вписанного угла, опирающегося на $\cup AB$; $0 < \alpha < 90°$
- Доказать: $AB = 2r \cdot sin\alpha$

Доказательство:



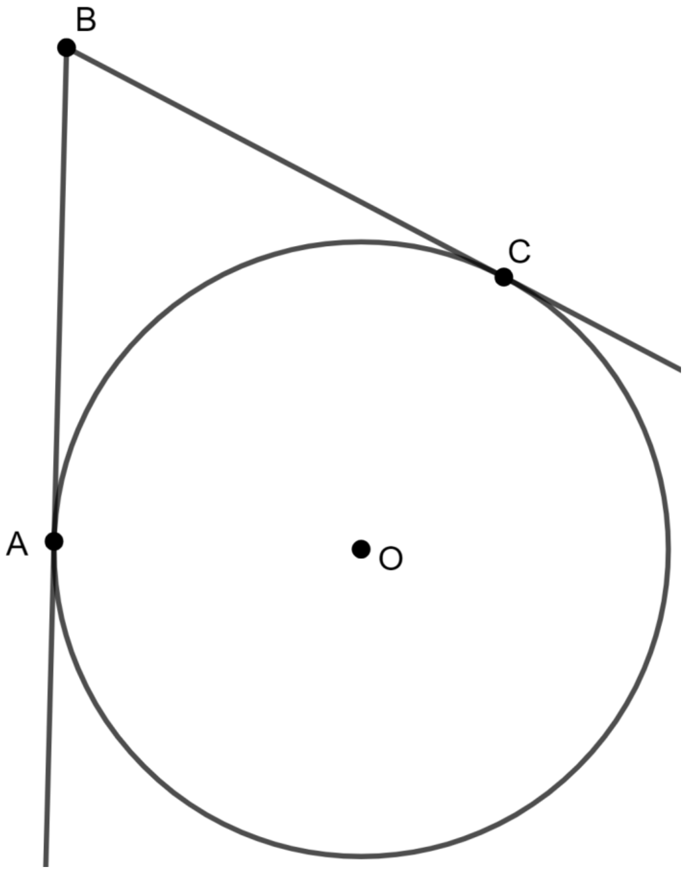
Проведем диаметр AD и рассмотрим ΔABD. В ΔABD $\angle ABD = 90°$, как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

$\angle ADB = \alpha$, значит, $AB = 2r \cdot sin\alpha$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду AB, равны α или $180° - \alpha$. Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство справедливо для всех вписанных углов.

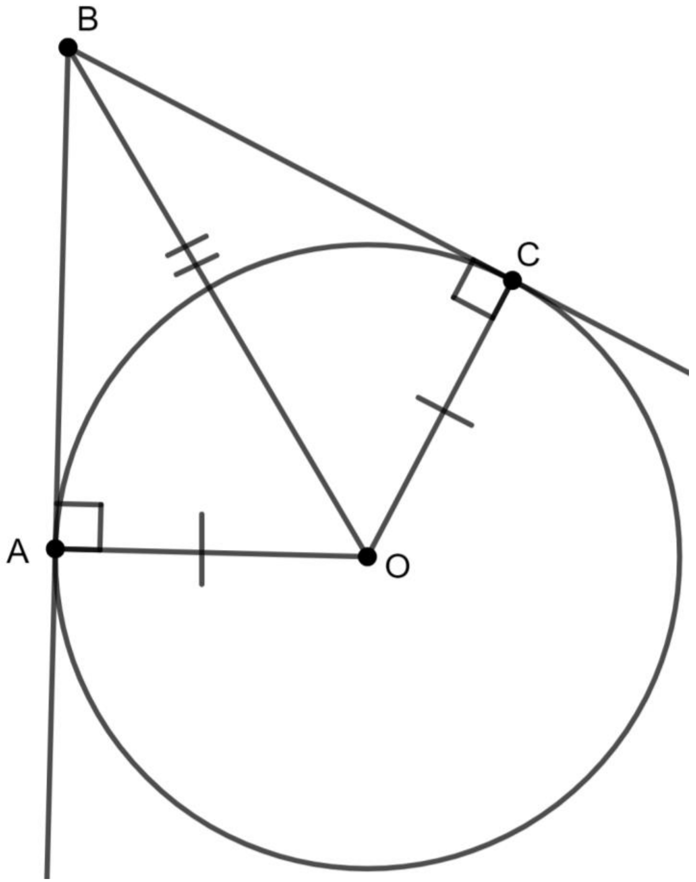
Доказать, что отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, от общей точки до точек касания, равны.

5



- Дано: Окр. (O, r), BA и BC –касательные к окружности; A и C –точки касания
- Доказать: $AB = BC$

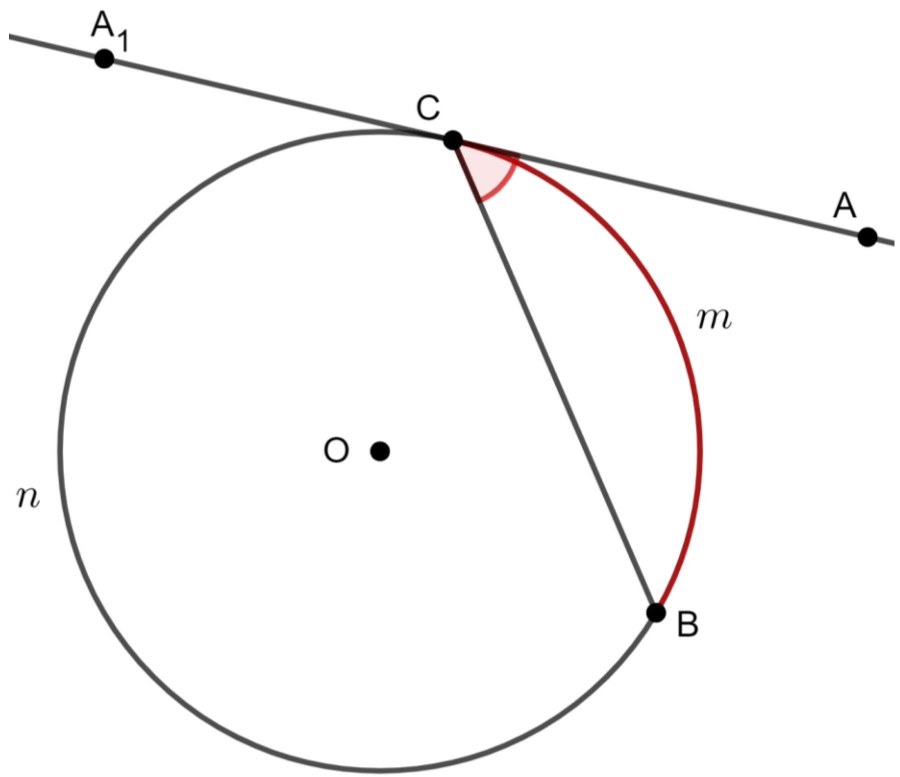
Доказательство:



Проведем радиусы OA и OC, отрезок OB.
$\Delta\, AOB = \Delta\, COB$ т.к. $\angle OAB = \angle OCB = 90°$ (свойство касательной к окружности), $OA = OC =$ r,
OB −общая гипотенуза,
Значит, $AB = BC$

6

Доказать, что угол, образованный касательной и хордой, проходящей через точку касания, измеряется половиной угловой величины дуги, заключенной между его сторонами.

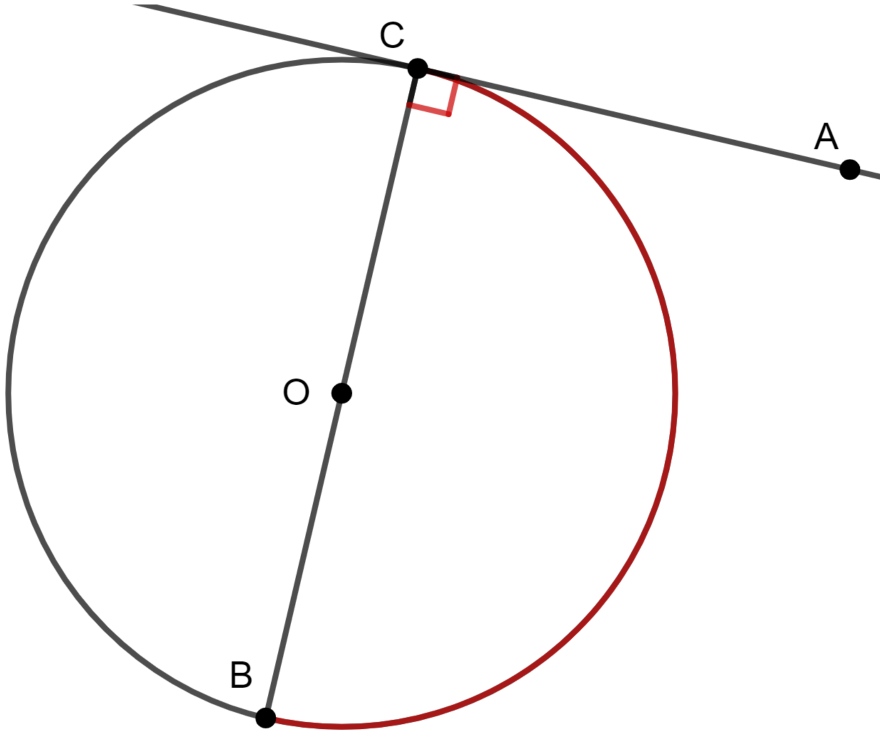


- Дано: Окр. (O, r), AC –касательная, C – точка касания, BC –хорда окружности

- Доказать: $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup CmB$,

$$\angle A_1CB = \frac{1}{2} \cup CnB$$

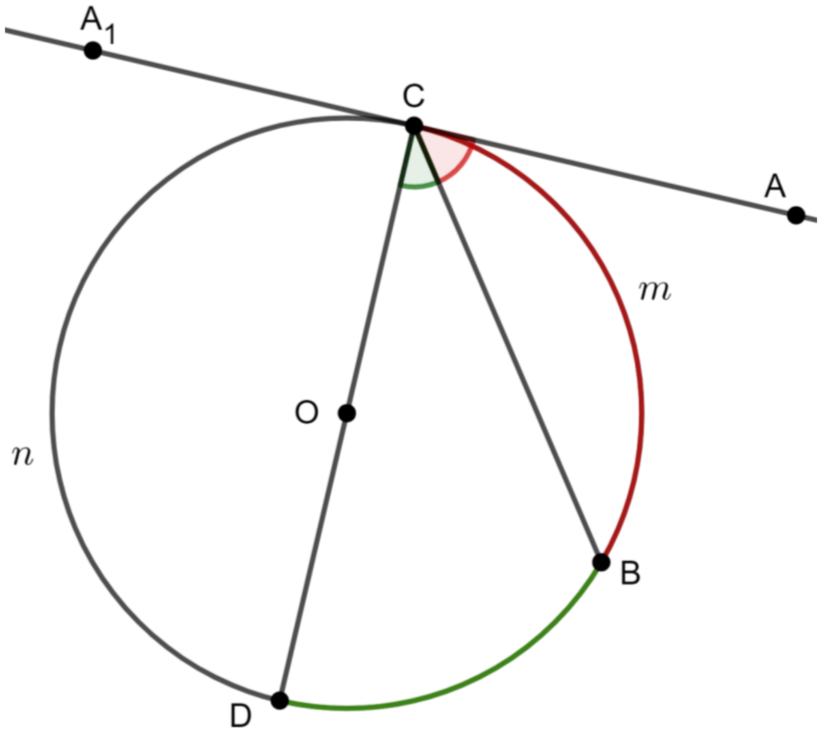
Доказательство:



Пусть $\angle ACB$ образован касательной AC и хордой BC окружности.

1.Если $\angle ACB = \angle A_1CB = 90°$, то BC – диаметр окружности и, следовательно, $\angle ACB$ и $\angle A_1CB$ измеряются половиной дуги полуокружности, заключенной внутри этих угла.

Доказательство:



2. Пусть $\angle ACB$ – острый, проведем диаметр CD.

$\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD, \angle ACB = 90° - \frac{1}{2} \cup BD,$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \cup CBD - \frac{1}{2} \cup BD,$

$\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup CBD - \cup BD), \qquad \angle ACB = \frac{1}{2} \cup CB$

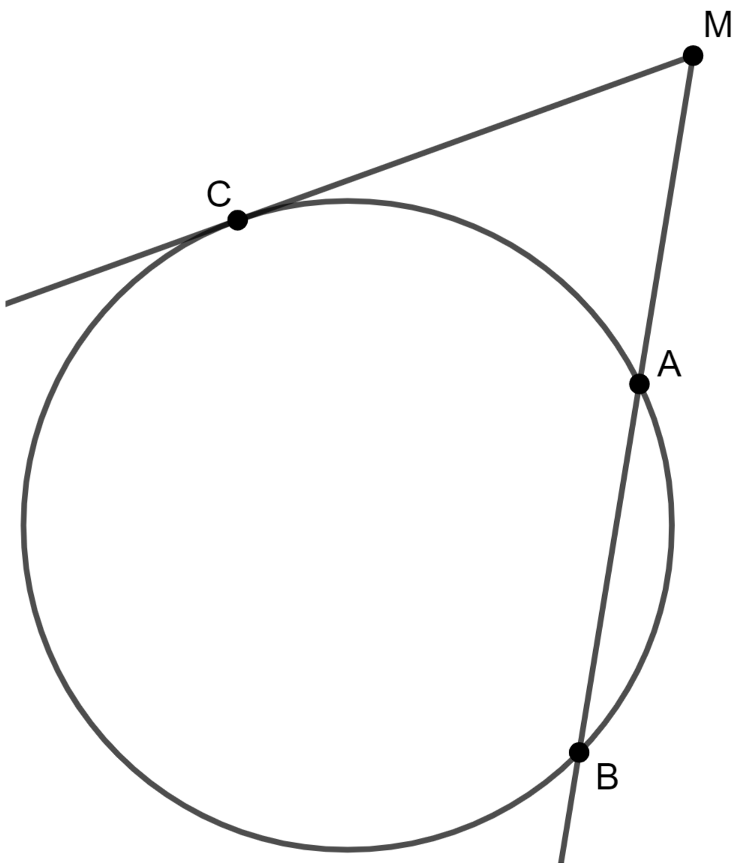
3. Если $\angle ACB$ острый, то $\angle A_1CB$ тупой,

$\angle A_1CB = 180° - \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot 360° - \frac{1}{2} \cup CB$

$= \frac{1}{2}(360° - \cup CB) = \frac{1}{2} \cup CnB$

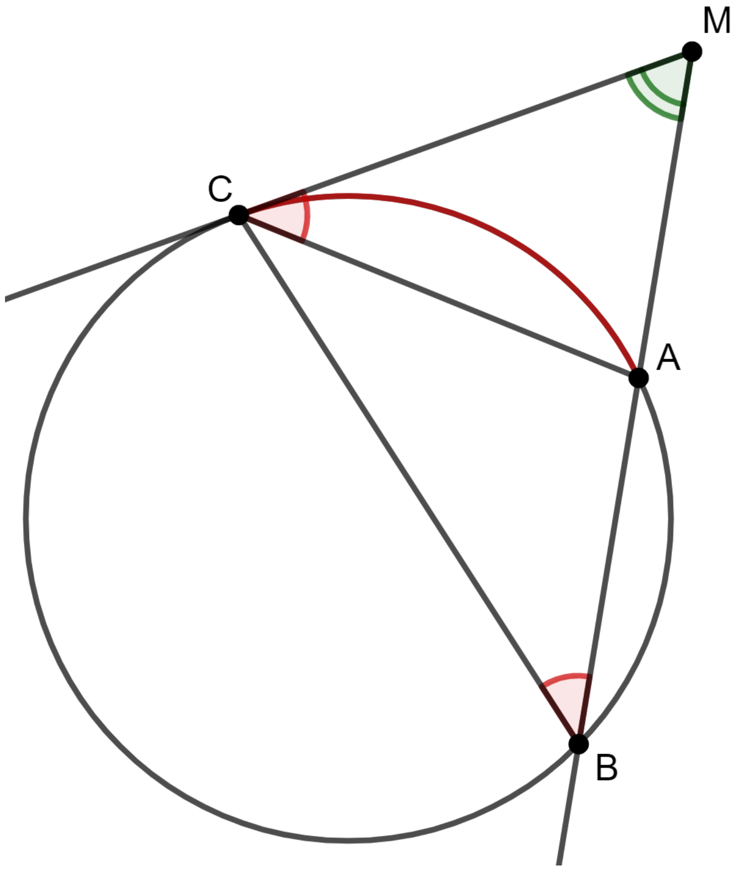
7

Доказать, что если из некоторой точки вне окружности проведены к окружности касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной с концами в общей точке и точке касания с окружностью равен произведению отрезков секущей с концами в общей точке и в токах пересечения секущей окружностью



- Дано: Окр. (O, r), MC –касательная к окружности, C – точка касания, MB – секущая, $A \in MB$, $A \in$ окр. (O, r)
- Доказать: $MC^2 = MA \cdot MB$

Доказательство:



ΔCMA подобен ΔBMC т.к.

$\angle CMA$ –общий

$\angle \mathrm{MBC} = \angle MCA = \frac{1}{2} \cup AC$

Значит,

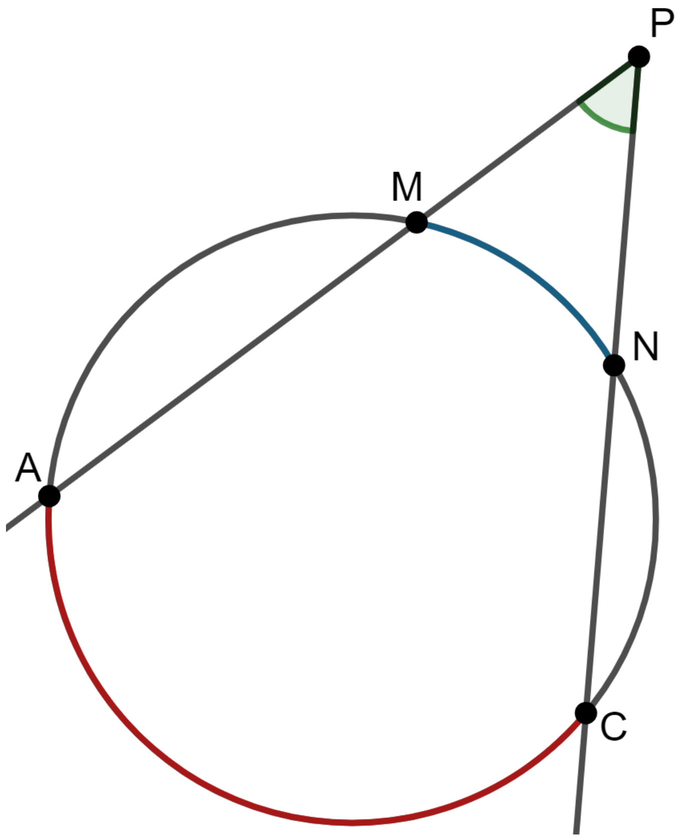
$$\frac{CM}{MB} = \frac{MA}{CM}$$

$$CM^2 = MB \cdot MA$$

Что и требовалось доказать.

Доказать, что угол, образованный двумя секущими с общей точкой, лежащей вне окружности (вершина угла), равен модулю полуразности угловых величин дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

8



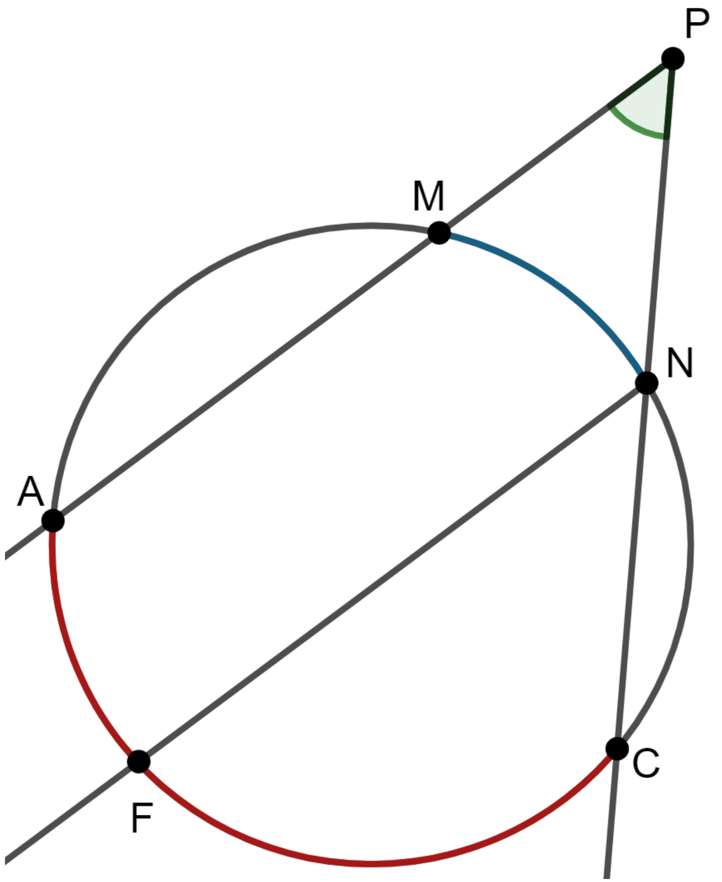
- Дано: Окр.(O, r), AP и PC − секущие, $M \in AP$, $M \in$ окр.(O, r), $N \in PC$, $N \in$ окр.(O, r), $\cup AC > \cup MN$

- Доказать:

$$\angle APC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup MN)$$

Доказательство:

8



Проведем прямую $NF \parallel AP$.

Тогда

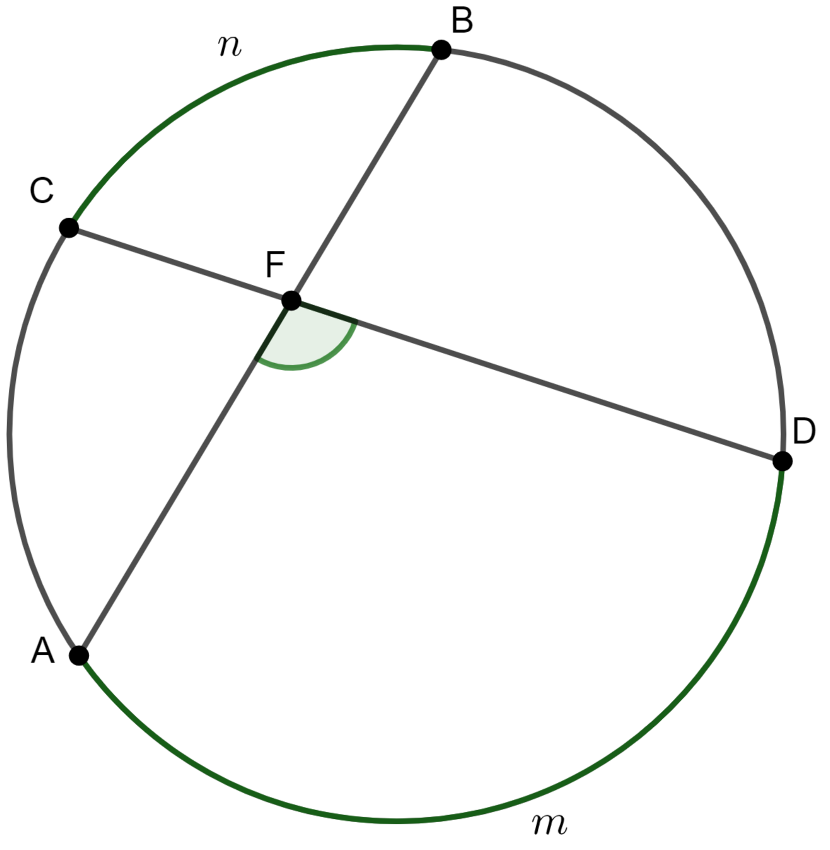
$$\angle APC = \angle FNC = \frac{1}{2} \cup FC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup AF) = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup MN),$$

т.к. $\angle APC$ и $\angle FNC$ соответственные при пересечении параллельных прямых AC и NF, секущей PC, $\angle FNC$ вписанный, опирающийся на $\cup FC$,

$\cup AF = \cup MN$ как дуги окружности, заключенные между параллельными прямыми.

Доказать, что угол, между пересекающимися хордами окружности равен полусумме угловых величин дуг, заключенных между сторонами данного угла и угла с ним вертикального

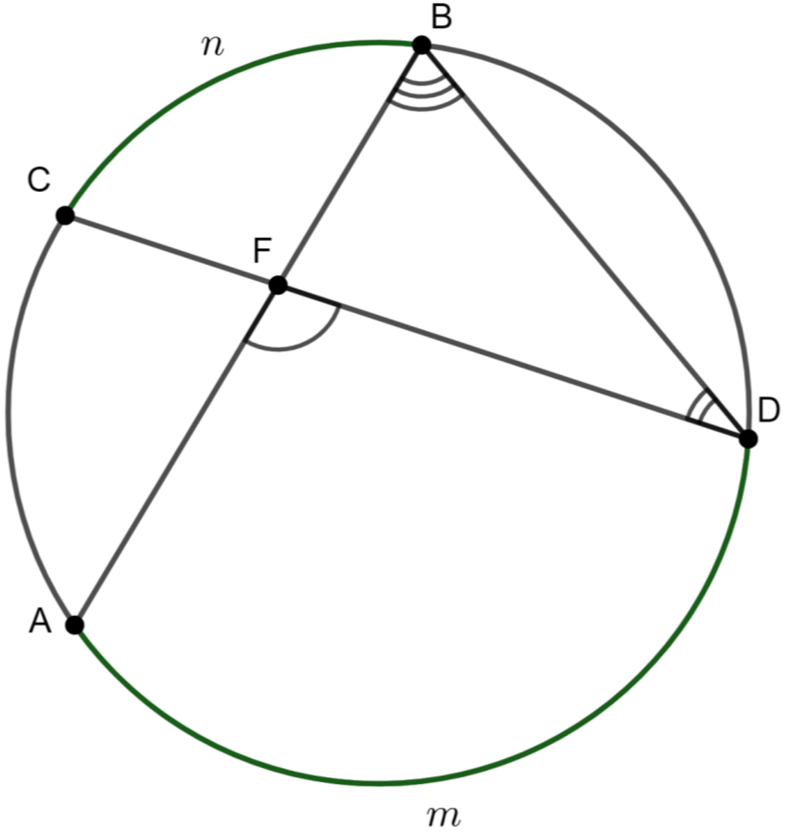
9



- Дано: AB и CD – хорды Окр.(O, r)
- Доказать:

$$\angle AFD = \frac{1}{2}(\cup AmD + \cup BnC)$$

Доказательство:



1. Рассмотрим ΔBFD:

$\angle AFD$ —внешний угол при вершине F.

По свойству внешнего угла треугольника $\angle AFD = \angle FDB + \angle FBD$.

$\angle FBD$ —вписанный угол, опирающийся на $\cup\, AD$, значит $\angle FBD = \frac{1}{2} \cup AmD$.

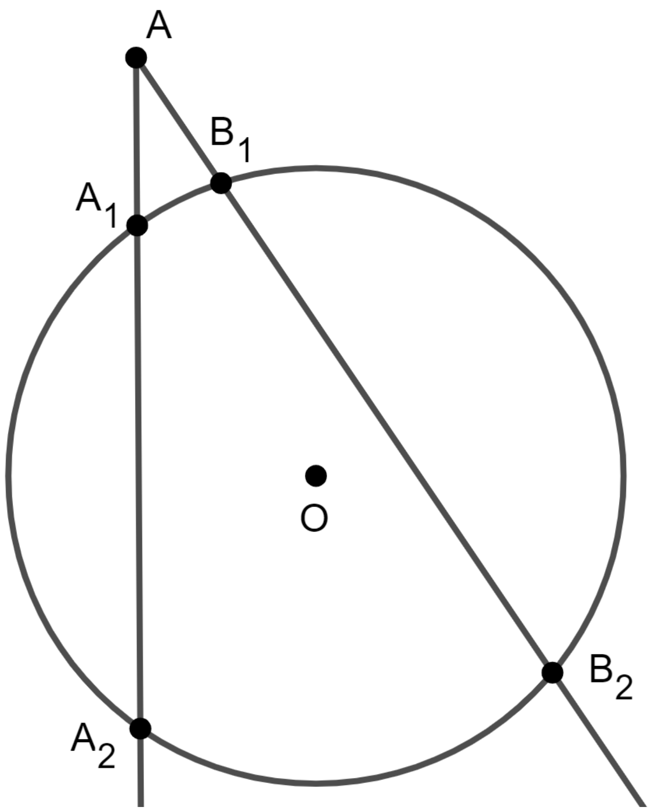
$\angle FDB$ —вписанный угол, опирающийся на $\cup\, BC$, значит $\angle FDB = \frac{1}{2} \cup BnC$.

2. $\angle AFD = \frac{1}{2} \cup AmD + \frac{1}{2} \cup BnC = \frac{1}{2}(\cup AmD + \cup BnC)$

Дана окружность и точка А вне окружности. Из точки А проводятся две секущие: одна из них пересекает окружность в точках A_1 и A_2, другая - в точках B_1 и B_2. Доказать, что

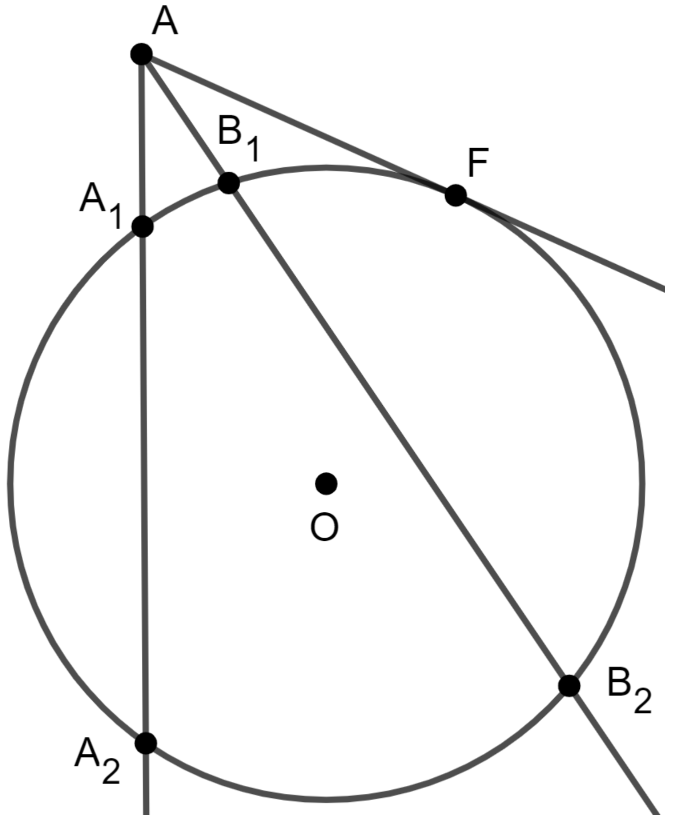
$$AA_1 \cdot AA_2 = AB_1 \cdot AB_2$$

10



- Дано: AA_2 и BB_2 – хорды
  Окр. (O, r)
- Доказать: $AA_1 \cdot AA_2 = AB_1 \cdot AB_2$

Доказательство:



Проведем касательную AF к окружности из точки A, F —точка касания.

По свойству касательной и секущих к окружности, проведенных из одной точки,

$AF^2 = AA_1 \cdot AA_2$,

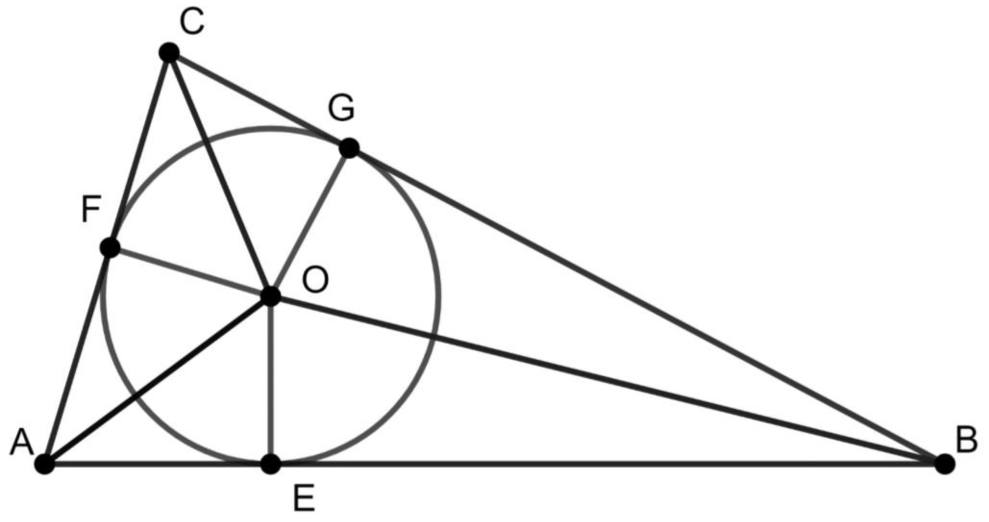
$AF^2 = AB_1 \cdot AB_2$.

Значит, $AA_1 \cdot AA_2 = \ AB_1 \cdot AB_2$

Ключевые задачи на вписанные в окружность и описанные около окружности треугольники

Доказать, что площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

11

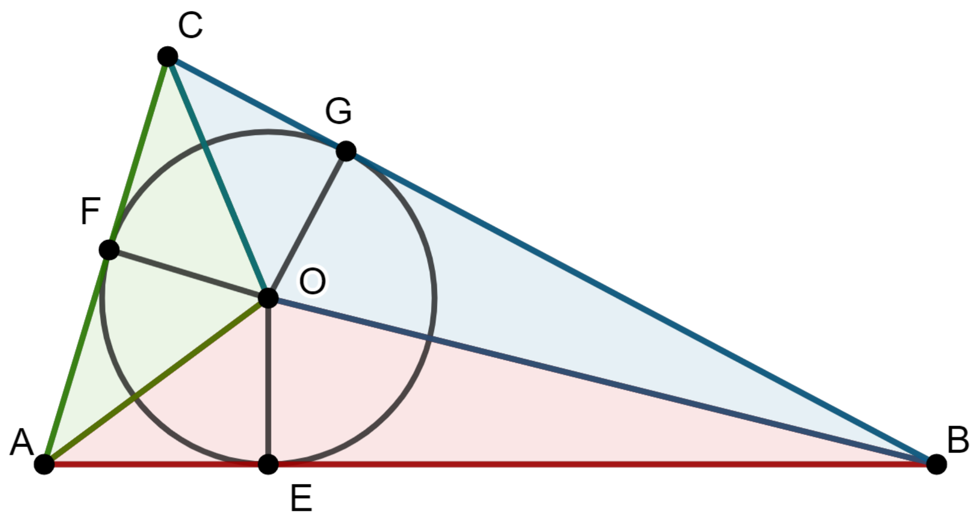


- Дано: ΔABC, Окр. (O, r) – вписанная в ΔABC, $OF \perp AC$, $OE \perp AB$, $OG \perp BC$

- Доказать: $S_{\Delta ABC} = p \cdot r$,

  где p – полупериметр

Доказательство:



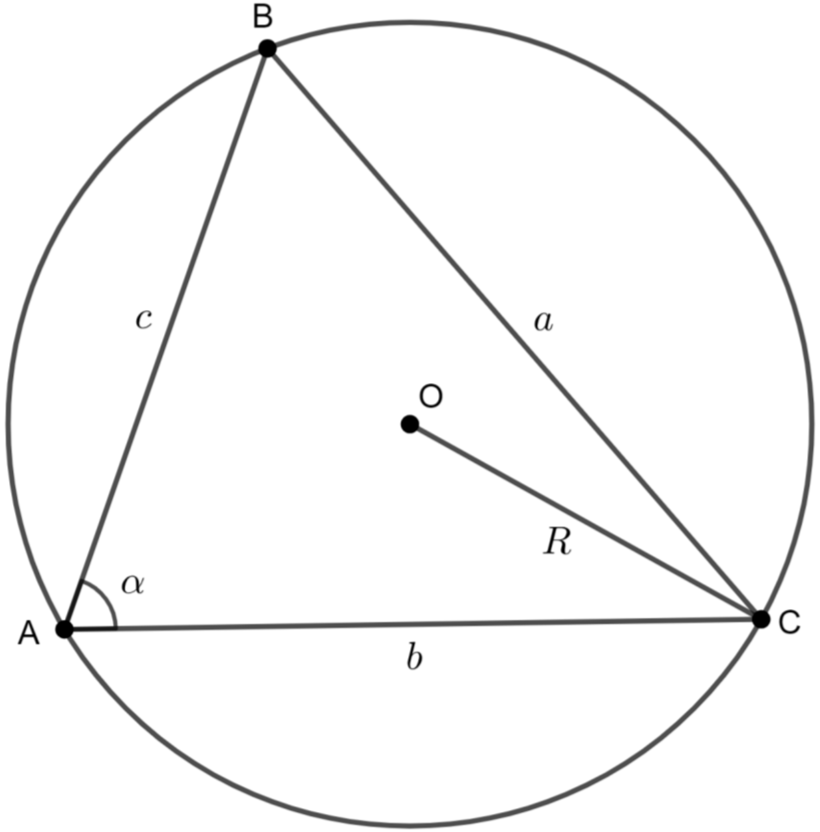
1. Соединим центр O вписанной в ΔABC окружности с вершинами треугольника. Пусть BC = a, AC = b, AB = c.

2. Рассмотрим ΔABC:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} + S_{\Delta AOB} =$$

$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}r = pr.$$

Доказать, что площадь треугольника равна произведению длин его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной около него окружности.

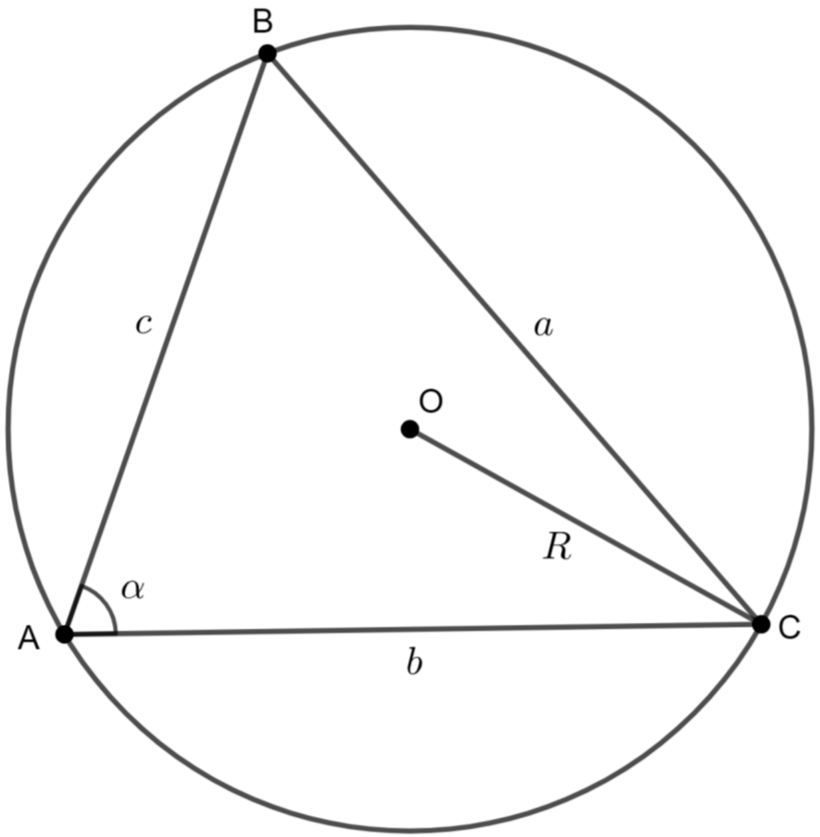


- Дано: ΔABC,
  Окр. (O, R) описана около ΔABC,

  $AB = a, BC = b, AC = c$

- Доказать: $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$

Доказательство:



1. Обозначим $\angle C = \alpha$. Площадь ΔABC по двум сторонам и углу между ними равна:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot sin\angle C = \frac{1}{2} bcsin\alpha$$

2. По следствию из теоремы синусов: $R = \frac{a}{2sin\alpha}$.

Выразим из этой формулы $sin\alpha$: $sin\alpha = \frac{a}{2R}$

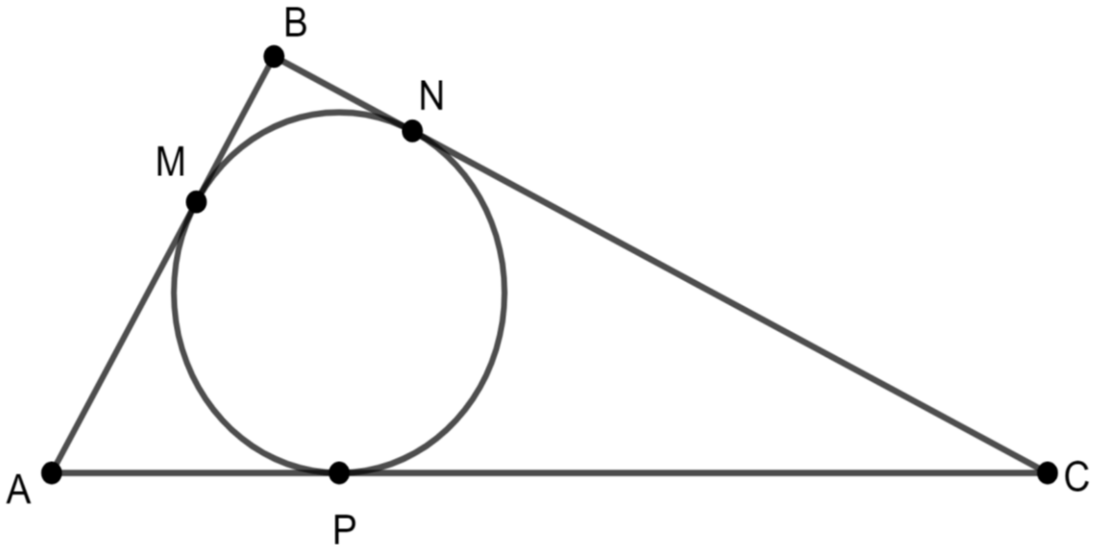
3. Подставим полученное выражение в первую формулу:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bcsin\alpha = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

Что и требовалось доказать.

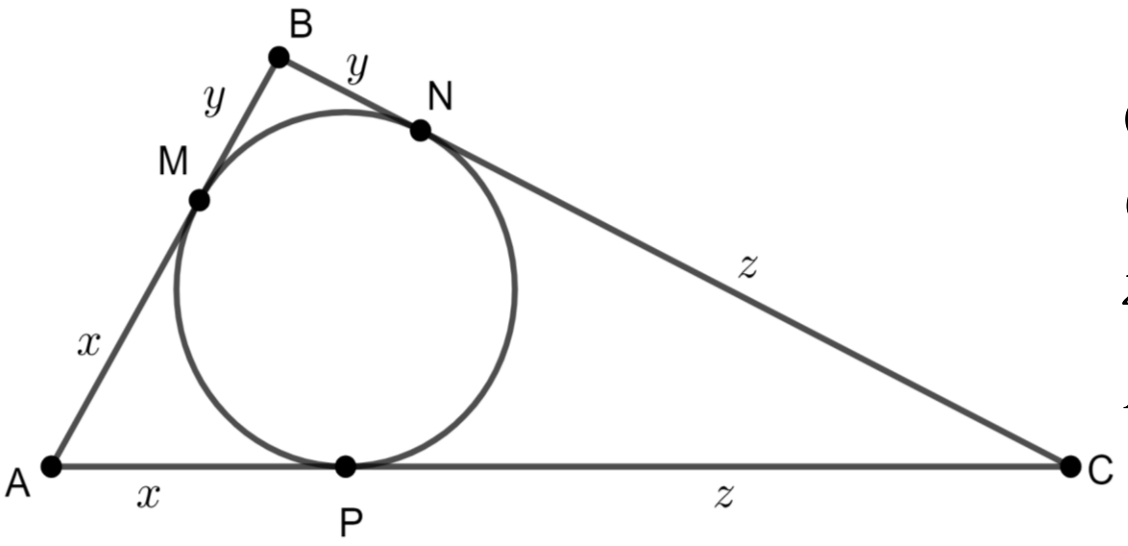
В треугольнике ABC BC=a, AC=b, AB=c, p-полупериметр треугольника ABC.
В треугольник вписана окружность. M-точка касания окружности со стороной AB, N-точка касания окружности со стороной BC, P- точка касания окружности со стороной AC.
Доказать, что AM=p-a, BN=p-b, CP=p-c.

13



- Дано: ΔABC, Окр.(O, r) вписана в ΔABC, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; p-полупериметр
- Доказать: $AM=p-a$, $BN=p-b$, $CP=p-c$

Доказательство:

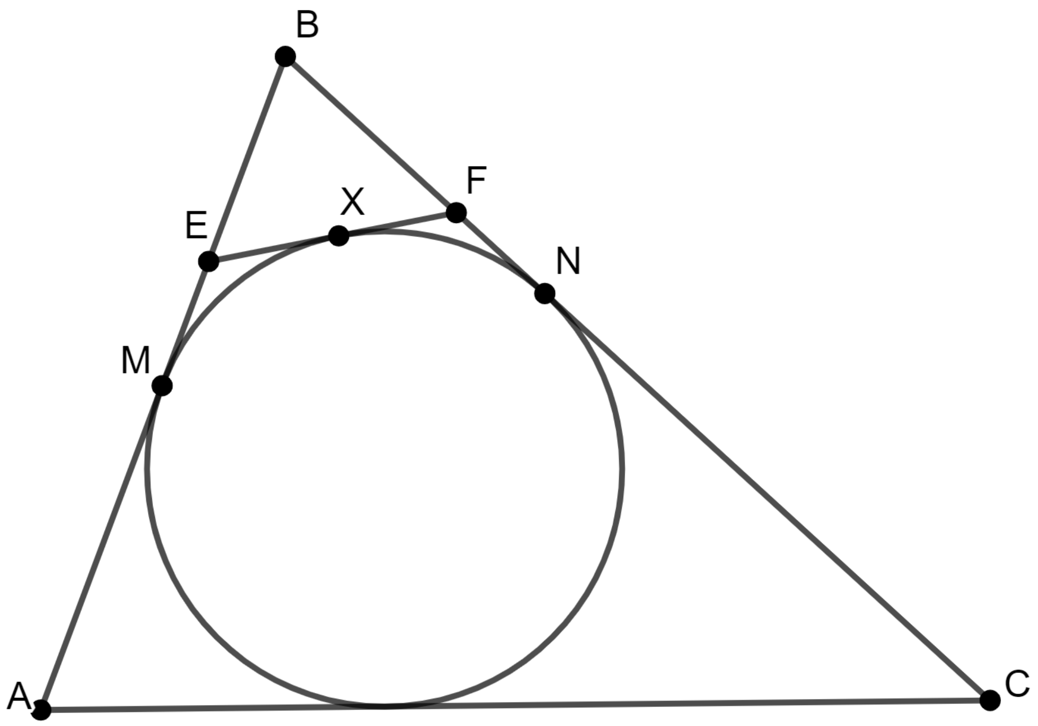


Обозначим $AP=AM$ через x, $BM=BN$ через y, $CN=CH$ через z. Тогда $2x+2y+2z=2p$, $x+y+z=p$, $x=p-(y+z)=p-a$.

Аналогично получим, что $y=p-b$, $z=p-c$.

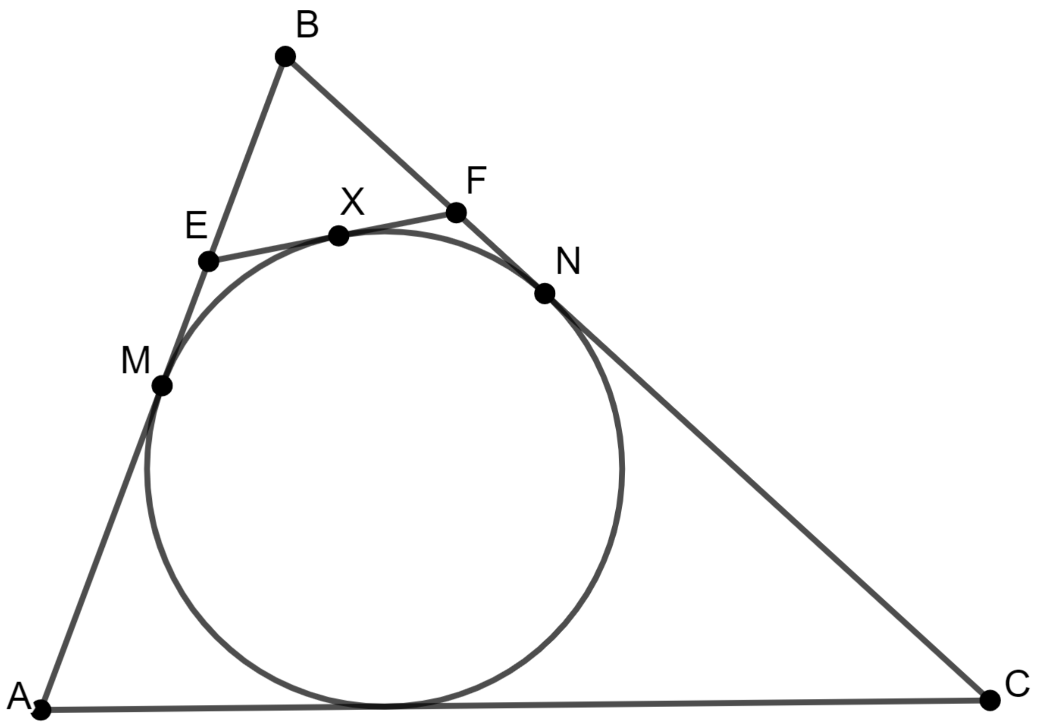
131

M и N – точки касания окружности со сторонами AB и BC треугольника ABC. X- произвольная точка дуги MN. EF – отрезок касательной, проведённой к окружности в точке X. Докажите, что периметр треугольника BEF не зависит от выбора точки X и равен 2(p-b), где p-полупериметр ABC, b-длина стороны AC.



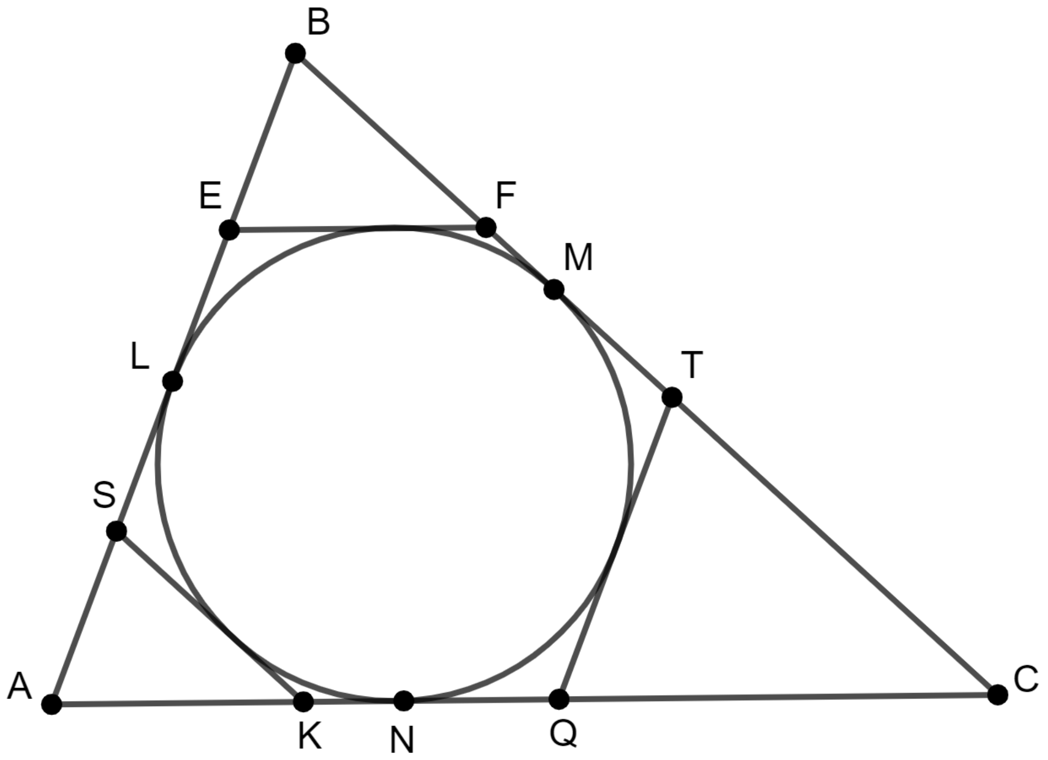
- Дано: ΔABC, Окр. (O, r) вписана в ΔABC, p-полупериметр; $AC=b$
- Доказать: $P_{\Delta BEF}=2(p\text{-}b)$

Доказательство:



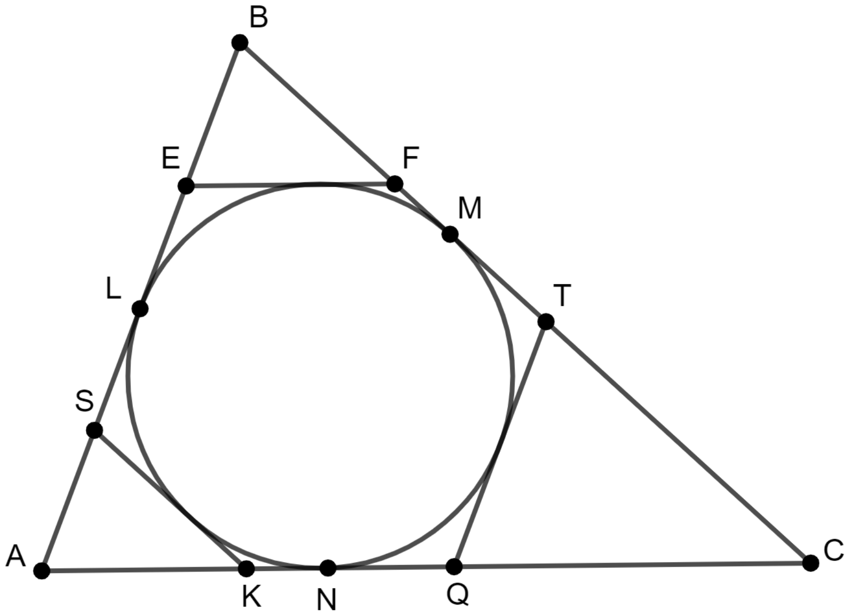
$$P_{\Delta BEF} = BE + BF + FE =$$
$$= BE + BF + XE + XF =$$
$$= BE + BF + ME + FN =$$
$$= BM + BN = 2(p - b)$$

В треугольнике проведены три прямые, параллельные его сторонам и касающиеся вписанной окружности. Они отсекают от данного треугольника три треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих образовавшихся треугольников R_1, R_2, R_3. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.



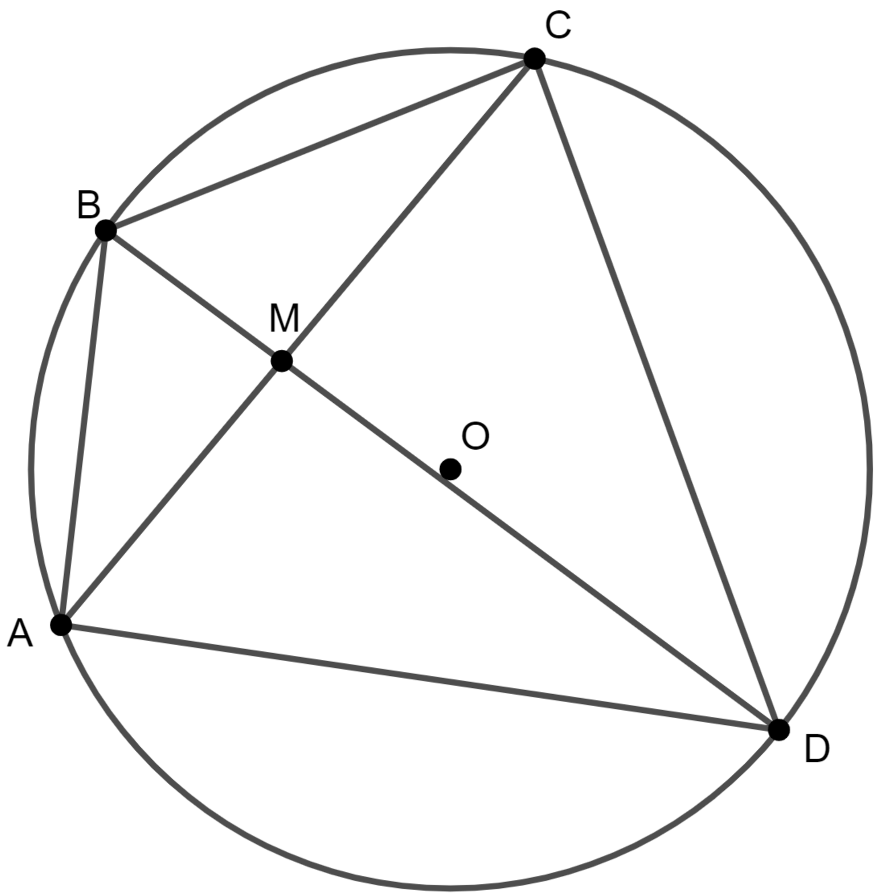
- Дано: ΔABC, Окр.(O, r) вписана в ΔABC, $EF \parallel AC$, $SK \parallel BC$, $TQ \parallel BA$, EF, SK, QT – касающиеся к окружности
- Найти: R

Доказательство:



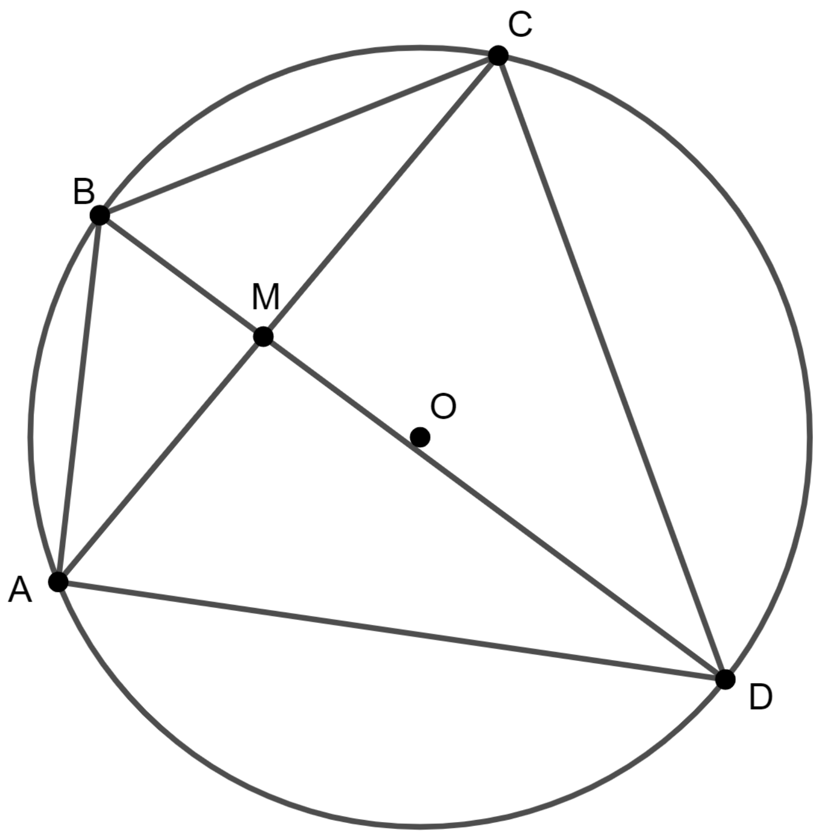
Пусть AB=c, BC=a, AC=b.
Тогда $P_{ASK} = 2(p-a)$, $P_{BEF} = 2(p-b)$, $P_{QTC} = 2(p-c)$.
Так как $EF \parallel AC$, SK ∥ BC, TQ ∥ AB, то Δ BEF ∾ Δ ABC ,
$\Delta ASK \backsim \Delta ABC$, $\Delta TQC \backsim \Delta ABC$.
Периметры подобных треугольников относятся как их соответствующие линейные элементы. Тогда
$\frac{R_1}{R} = \frac{2(p-a)}{2p}$, $\frac{R_2}{R} = \frac{2(p-b)}{2p}$, $\frac{R_3}{R} = \frac{2(p-c)}{2p}$, где R - радиус окружности, описанной около Δ ABC .
Сложим левые и правые части полученных равенств и преобразуем правую часть:
$$\frac{R_1+R_2+R_3}{R} = \frac{p-a+p-b+p-c}{p} = \frac{3p-(a+b+c)}{p} = \frac{3p-2p}{p} = 1.$$
Значит, $R_1 + R_2 + R_3 = R$.

ABCD-четырехугольник, O-точка пересечения его диагоналей. Доказать, что около ABCD можно описать окружность тогда и только тогда, когда $AM \cdot MC = BM \cdot MD$



- **Необходимость.**
- Дано: $ABCD$ — четырехугольник, M — точка пересечения AC и BD, Окр. (O, R) описана около $ABCD$
- Доказать: $AM \cdot MC = BM \cdot MD$
- **Достаточность.**
- Дано: $ABCD$ — четырехугольник, M — точка пересечения AC и BD, $AM \cdot MC = BM \cdot MD$
- Доказать: около $ABCD$ можно описать окружность

Необходимость. Доказательство:

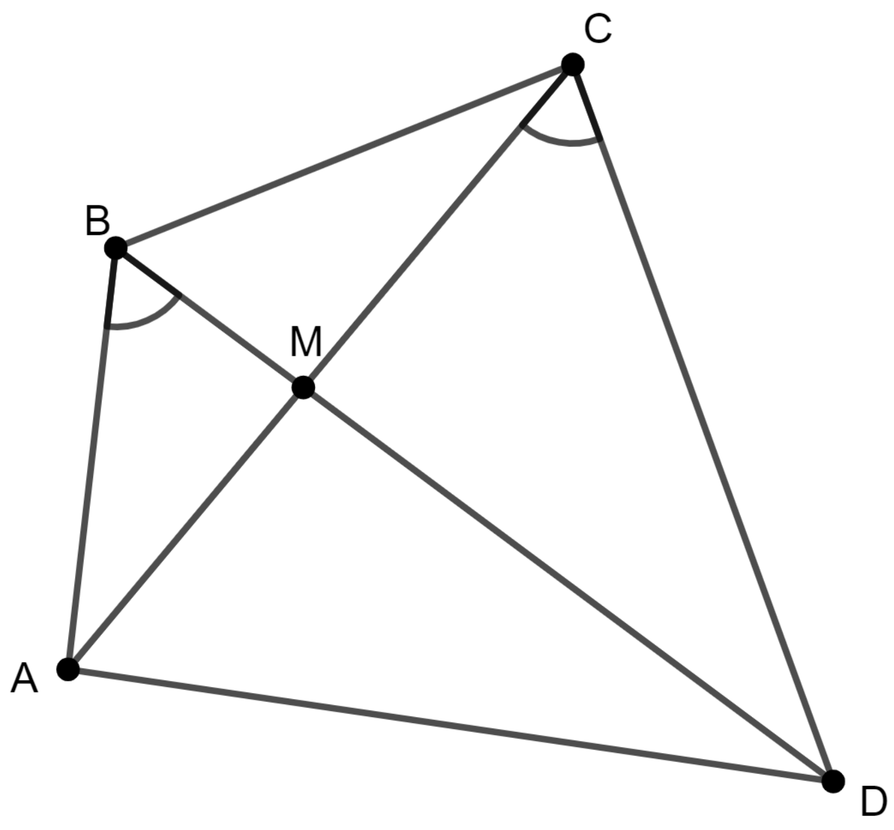


$\Delta AMB \backsim \Delta CMD$, т.к. $\angle ABM = \angle MCD = \frac{1}{2} \cup AD$,

$\angle BAM = \angle MDC = \frac{1}{2} \cup BC$.

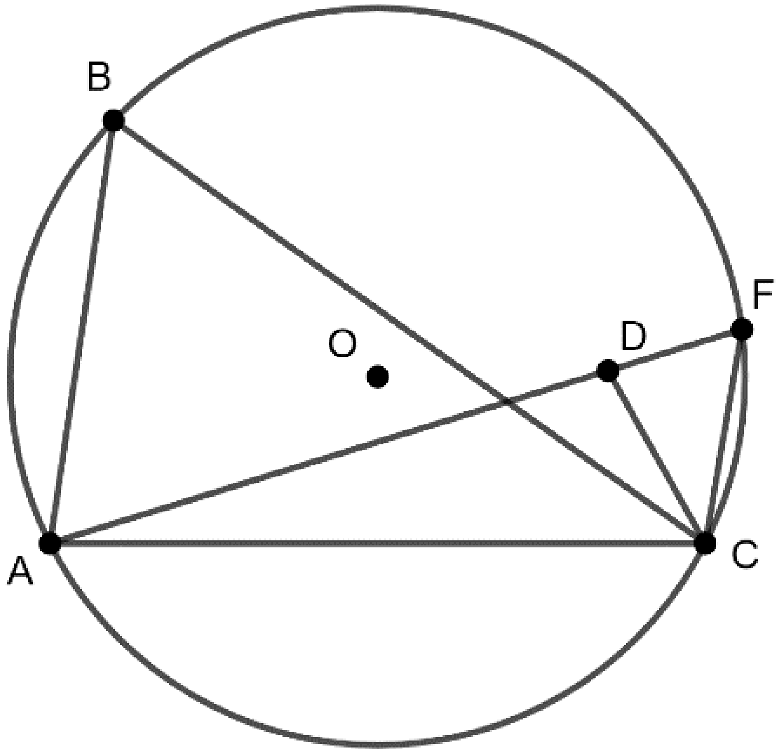
Значит, $\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD}$, $BM \cdot MD = AM \cdot MC$

Достаточность. Доказательство:



В ΔAMB и ΔCMD $\angle AMB = \angle CMD$ и $\frac{AM}{BM} = \frac{MD}{MC}$. Значит, $\Delta AMB \backsim \Delta CMD$ и $\angle ABM = \angle \mathrm{MCD}$, или $\Delta ABM = \Delta CMD$. Тогда точки A, B, C, D лежат на одной окружности и около $ABCD$ можно описать окружность.

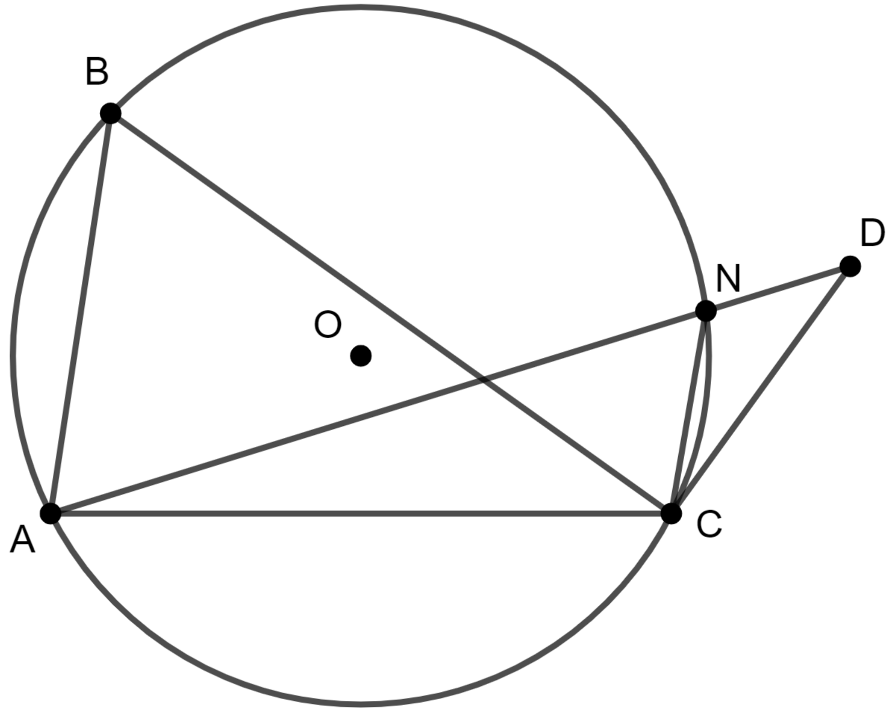
В треугольниках АВС и ADC точки В и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой АС, угол АВС равен углу ADC. Доказать, что точки A,B,D и С лежат на одной окружности



Рассмотрим окружность, описанную около треугольника АВС. А) Предположим, что точка D лежит внутри окружности, описанной около треугольника АВС. Тогда луч AD пересечёт окружность в некоторой точке F.
По условию ∠ADC = ∠ ABC, но ∠ABC вписанный и опирается на дугу АС окружности. На эту же дугу опирается вписанный ∠ AFC. Значит, ∠ ADC, ∠ ABC и ∠ AFC равны.

Это противоречит теореме о внешнем угле треугольника: ∠ ADC внешний угол Δ FCD и равен сумме ∠ AFC и ∠ FCD. Значит, точка D не может лежать внутри данной окружности.

В треугольниках ABC и ADC точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, угол ABC равен углу ADC. Доказать, что точки A,B,D и C лежат на одной окружности



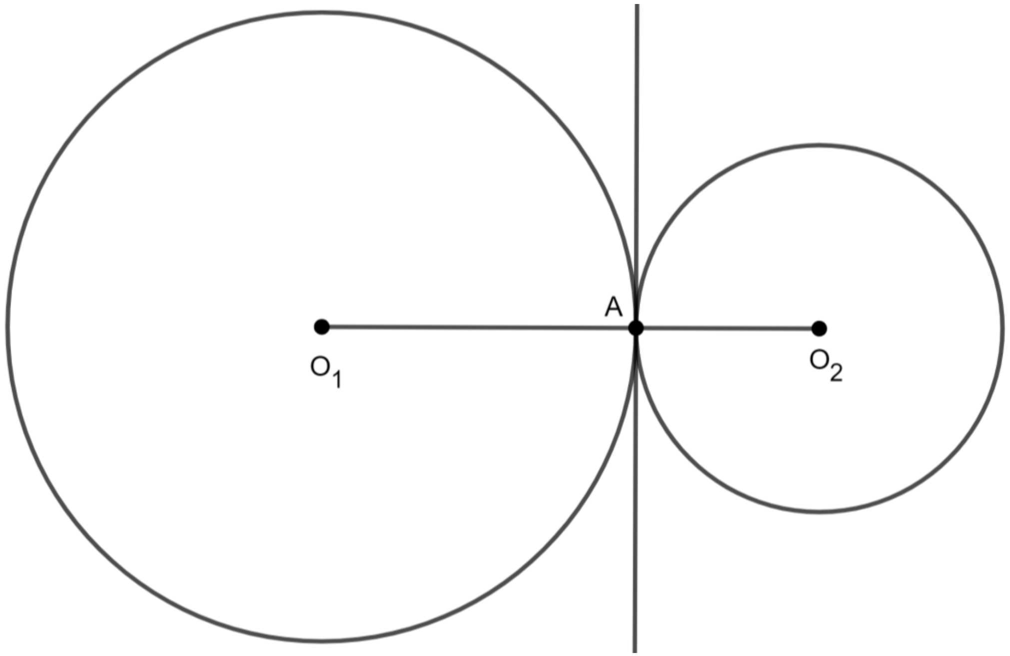
Б) Предположим, что точка D лежит вне окружности. Зафиксируем точку N пересечения отрезка AD с окружностью. Аналогично проведённому доказательству убеждаемся, что точка D не может лежать вне окружности.

Точка D, по доказанному выше, не может лежать внутри и вне окружности, описанной около ΔABC, значит, она лежит на окружности.

Следовательно, точки A, B, D и C лежат на одной окружности.

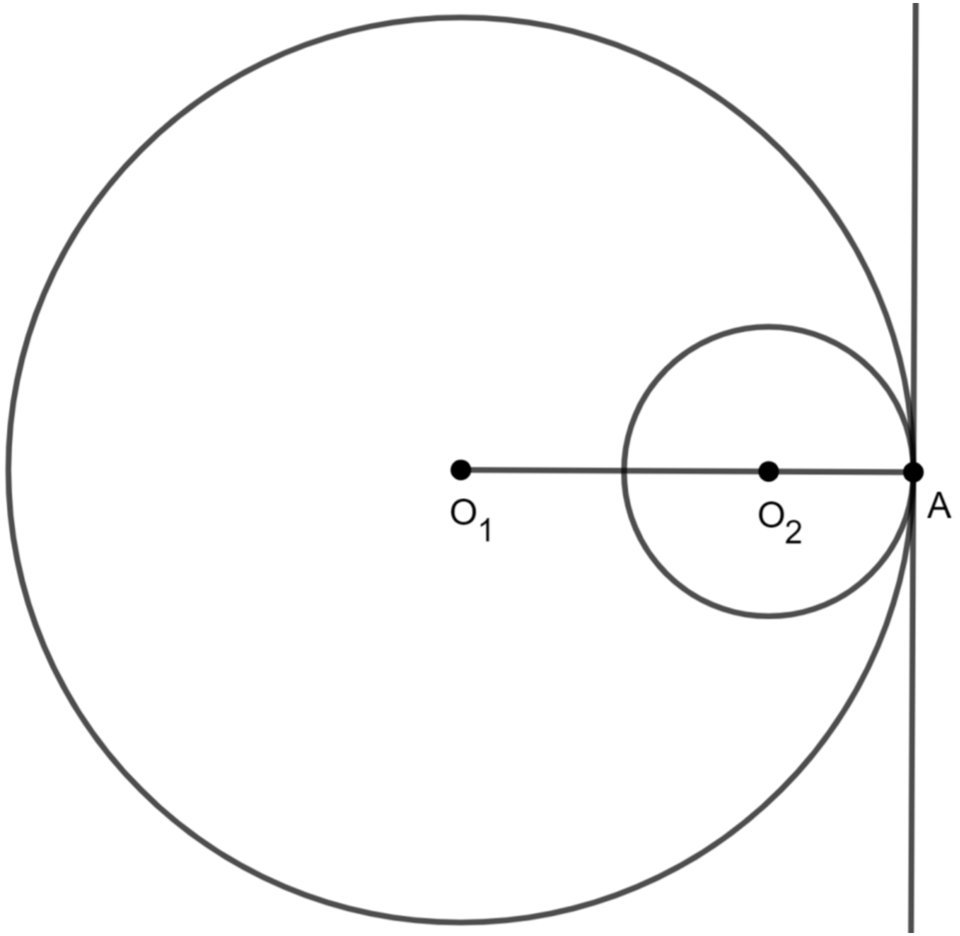
Ключевые задачи на взаимное расположение двух окружностей

Докажите, что центры двух касающихся окружностей и точка касания лежат на одной прямой.



- Дано: Окр.(O_1, r_1), Окр.(O_2, r_2), A- точка касания окружностей
- Доказать: O_1 и O_2 лежат на одной прямой
- Доказательство: проведем общую касательную к окружностям в точке A

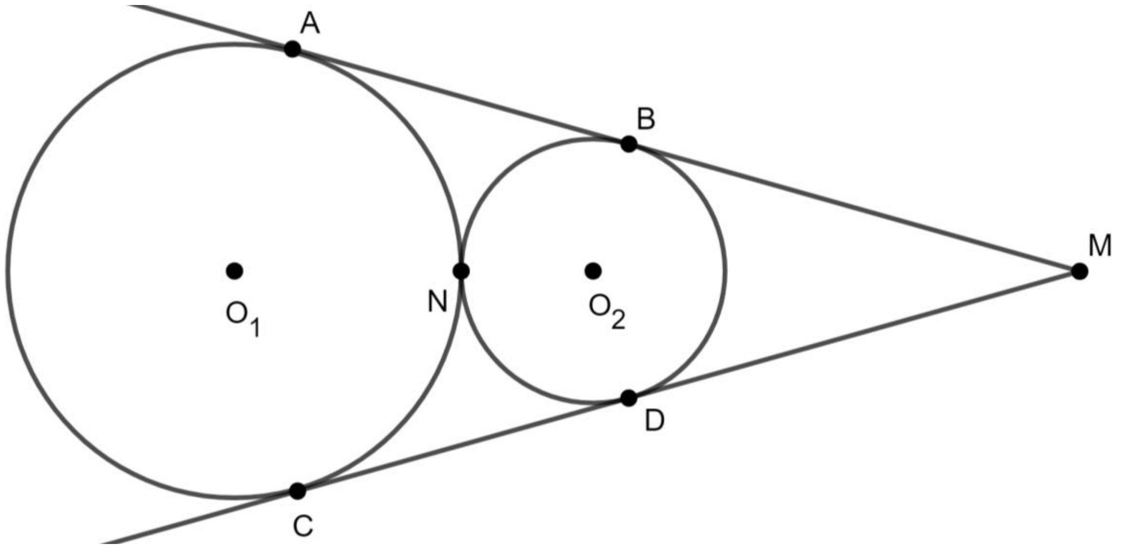
Доказательство:



Пусть окружности касаются внешним образом.
$O_1A \perp k, O_2A \perp k$
По теореме о существовании и единственности прямой, перпендикулярной данной, через точку А можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной прямой k.
Следовательно, все три точки: центры окружностей O_1, O_2 и A лежат на одной прямой.
Если окружности касаются внутренним образом, то доказательство аналогично.

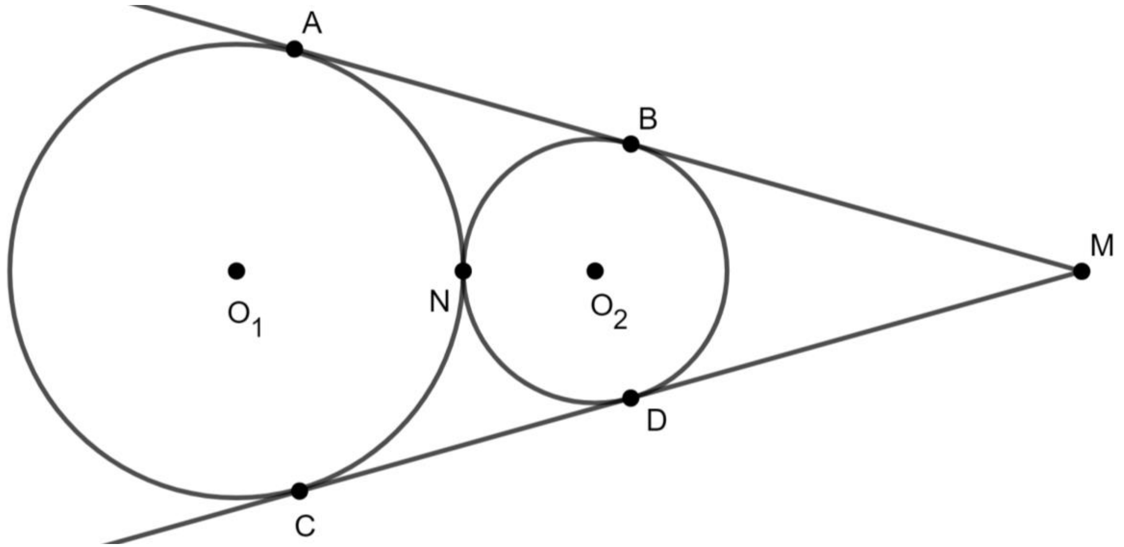
Докажите, что отрезки общих касательных, проведённых к внешне касающимся окружностям, с концами в точках касания равны

17



- Дано: Окр.(O_1, r_1), Окр.(O_2, r_2), N —точка касания окружностей, MA и MC —общие касательные, $A \in$ Окр.(O_1, r_1), $C \in$ Окр.(O_1, r_1), $B \in MA$, $B \in$ Окр.(O_2, r_2), $D \in MC$, $D \in$ Окр.(O_2, r_2)
- Доказать: $AB = CD$

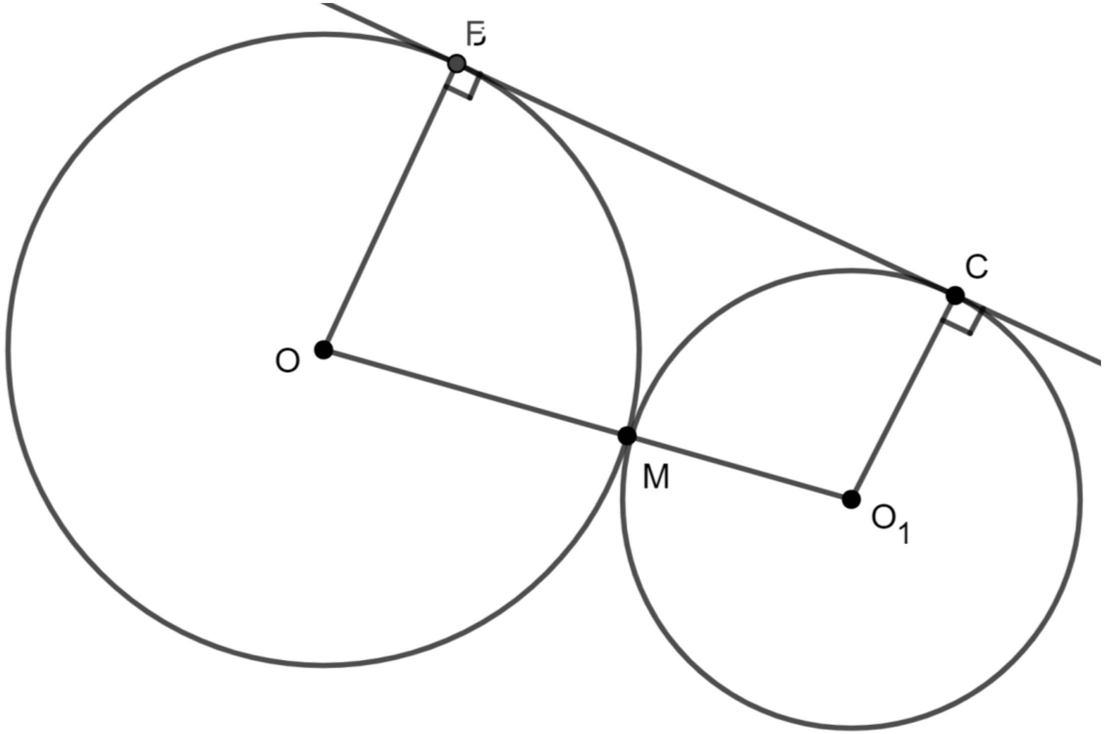
Доказательство:



$MA = MC, MB = MD$
по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки,
значит, $AB = CD$ $(MA - MB = AB,$
$MC - MD = CD)$.

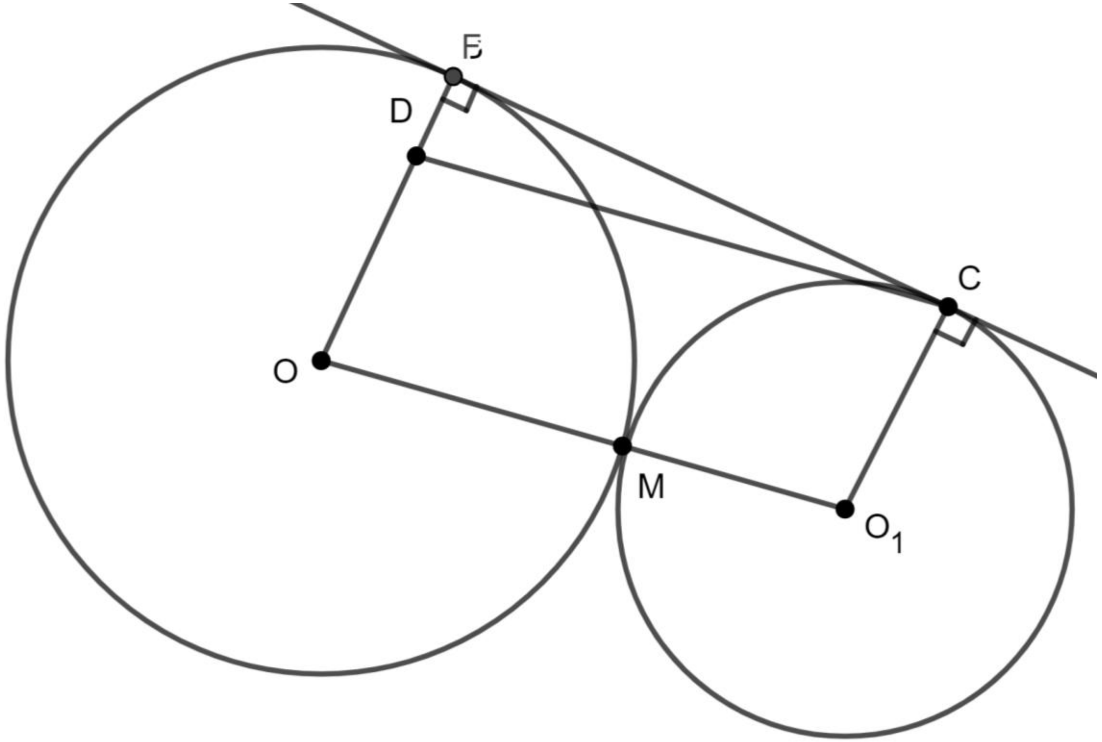
Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найти длину отрезка общей касательной с концами в точках касания

18



- Дано: Окр.(O, R), и Окр.(O, r) касаются внешним образом, M − точка касания окружностей, BC −общая касательная к окружностям, B − точка касания с Окр.(O, R), C − точка касания с Окр.(O, r)
- Найти: BC.

Решение:



Точки O, O_1, M лежат на одной прямой, $O_1O = R + r$. Через C проведем $CD \parallel OO_1$, тогда $ODCO_1$ параллелограмм, т.к. $BO \parallel O_1C$ $(BO \perp BC, C_1O \perp BC)$, $CD \parallel OO_1$.

В ΔBCD $\angle DBC = 90°$,

$BD = BO - DO = R - r,$

$DC = OO_1 = R + r,$

$$BC = \sqrt{DC^2 - BD^2} = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{2R \cdot 2r} = 2\sqrt{Rr}$$